MOMENTI D'INERZIA DI SUPERFICI

(Distillazione verticale)

OBIETTIVO: SAPERE CALCOLARE I MOMENTI D'INERZIA DI FIGURE PIANE COMPLESSE.

- Momento d'inerzia rispetto ad una retta (def.)
  Unità di misura
- Teorema di trasposizione (enunciato + formula)
  Esempi di sua utilizzazione (appl.)
- Momento d'inerzia polare (def.)
  Relazione tra momenti d'inerzia polare e assiali (formula)
- Raggio d'inerzia (def.)
- Momento centrifugo (def)
- Momenti d'inerzia rispetto ad assi baricentrici del rettangolo, parallelogramma, triangolo, cerchio (appl.)
- Momenti d'inerzia di figure complesse (calcolo)
  Strategia di soluzione (descr.)
  Esempi con applicazioni del teorema di trasposizione

MOMENTI D'INERZIA DI SUPERFICI - SCHEDA DI LEZIONE

MOMENTO D'INERZIA ASSIALE: è la somma dei prodotti delle aree infinitesime (a_i) per i quadrati delle distanze (d_i^2) dall'asse.

$$J_t = \sum a_i \cdot d_i^2 = a_1 \cdot d_1^2 + a_2 \cdot d_2^2 + ...+ a_n \cdot d_n^2$$

Il momento d'inerzia assiale è sempre positivo e la sua unità di misura è quella di una lunghezza alla quarta potenza (m^4).

TEOREMA DI TRASPOSIZIONE: il momento d'inerzia rispetto ad un asse t si ottiene sommando al momento d'inerzia rispetto all'asse t_0 baricentrico e parallelo a t, il prodotto dell'area (A) della superficie per il quadrato della distanza (d^2) fra le rette t e t_0

$$J_t = J_{t_0} + A \cdot d^2$$

Si utilizza per calcolare momenti d'inerzia rispetto ad assi paralleli ad assi baricentrici.

MOMENTO D'INERZIA POLARE: è la somma dei prodotti della aree infinitesime (a_i) per i quadrati delle distanze (d_i^2) dal punto dato.

$$J_P = \sum a_i \cdot z_i^2 = a_1 \cdot z_1^2 + a_2 \cdot z_2^2 + ...+ a_n \cdot z_n^2$$

Si dimostra che $J_P = J_r + J_t$ dove r e t sono due assi perpendicolari che si intersecano nel punto P.

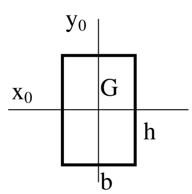
RAGGIO D'INERZIA: è la distanza dalla retta fino ad un punto in cui si dovrebbe concentrare tutta l'area della figura per ottenere lo stesso valore del momento d'inerzia.

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{A}}$$

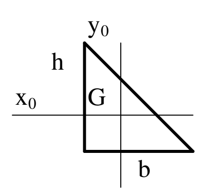
MOMENTO CENTRIFUGO: è la somma dei prodotti delle aree infinitesime (a_i) per le rispettive distanze dalle due rette considerate.

$$J_{xy} = \sum a_i \cdot x_i \cdot y_i = a_1 \cdot x_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot x_2 \cdot y_2 + ...+ a_n \cdot x_n \cdot y_n$$

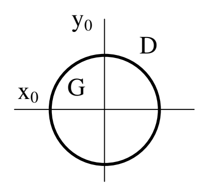
MOMENTI D'INERZIA DI FIGURE ELEMENTARI RISPETTO AD ASSI BARICENTRICI.



$$Jx_0 = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad Jy_0 = \frac{h \cdot b^3}{12}$$



$$Jx_0 = \frac{b \cdot h^3}{36} \qquad Jy_0 = \frac{h \cdot b^3}{36}$$



$$Jx_0 = Jy_0 = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \qquad J_G = Jx_0 + Jy_0 = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$$

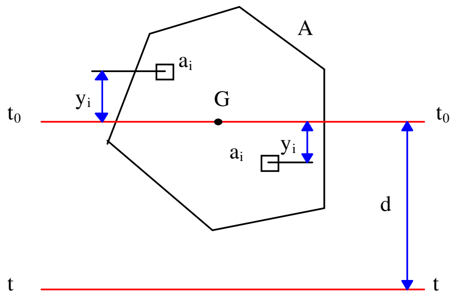
STRATEGIA DI SOLUZIONE per il calcolo dei momenti d'inerzia di figure complesse:

1) si divide la figura in figure elementari di cui sono noti i momenti d'inerzia rispetto ad assi baricentrici, perché i momenti d'inerzia possono essere sommati o sottratti, purché siano calcolati rispetto allo stesso asse;
2) di ogni figura elementare si calcola il momento d'inerzia rispetto alla retta assegnata utilizzando, se necessario, il teorema di trasposizione;
3) si calcola la somma algebrica dei momenti d'inerzia delle figure elementari.

TEOREMA DI TRASPOSIZIONE: il momento d'inerzia rispetto ad un asse t si ottiene sommando al momento d'inerzia rispetto all'asse t_0 baricentrico e parallelo a t, il prodotto dell'area (A) della superficie per il quadrato della distanza (d^2) fra le rette t e t_0

$$J_t = J_{t_0} + A \cdot d^2$$

DIMOSTRAZIONE: consideriamo una figura piana qualsiasi e suddividiamola in aree infinitesime a_i



Le aree elementari a_i che stanno al di sopra dell'asse baricentrico t_o, distano (y_i + d) dall'asse t, mentre le aree elementari a_i che stanno al di sotto dell'asse baricentrico t_o, distano (y_i - d) dall'asse t. In generale possiamo scrivere:

$J_t = \sum a_i \cdot (y_i \pm d)^2$ sviluppando il quadrato del binomio si ha:

$$J_t = \sum a_i \cdot (y_i^2 + d^2 \pm 2 \cdot y_i \cdot d) =$$
$$= \sum a_i \cdot y_i^2 + \sum a_i \cdot d^2 \pm \sum a_i \cdot 2 \cdot y_i \cdot d$$

Portando fuori dal segno di sommatoria le costanti, si ottiene:

$J_t = \sum a_i \cdot y_i^2 + d^2 \cdot \sum a_i \pm 2 \cdot d \cdot \sum a_i \cdot y_i$ ma $\sum a_i \cdot y_i = 0$ perchè è il momento statico della figura rispetto ad un suo asse baricentrico $\Rightarrow$

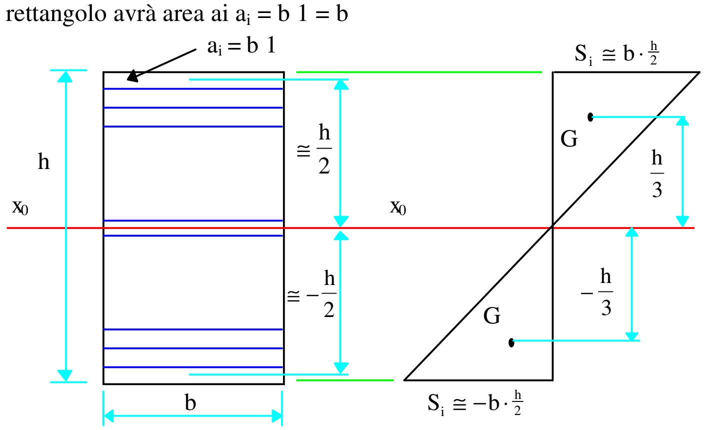
$J_t = \sum a_i \cdot y_i^2 + d^2 \cdot \sum a_i$ ma si ha $\begin{cases} \sum a_i \cdot y_i^2 = J_{t_0} \\ \sum a_i = A \end{cases}$ $\Rightarrow$

$J_t = J_{t_0} + A \cdot d^2$ come volevasi dimostrare

<u>Il momento d'inerzia di un rettangolo rispetto all'asse baricentrico parallelo al lato b vale</u> $\frac{b \cdot h^3}{12}$

DIMOSTRAZIONE:

suddividiamo il rettangolo in tante strisce piccolissime di area infinitesima di larghezza b e altezza unitaria per cui ogni rettangolo avrà area ai $a_i = b\ 1 = b$



Il momento d'inerzia può essere pensato come il momento statico di un momento statico, infatti:

$$J_{x_0} = \sum a_i \cdot y_i^2 = \sum (a_i \cdot y_i) \cdot y_i$$
$$= \sum (S_i) \cdot y_i$$

dove S_i è il momento statico della strisciolina i-esima rispetto all'asse baricentrico; tali momenti statici sono massimi per le striscioline più distanti dall'asse neutro, mentre per le altre striscioline va diminuendo (perché diminuisce la distanza dall'asse neutro) fino ad annullarsi per la strisciolina posta sull'asse neutro in quanto è nulla la distanza dall'asse baricentrico.

Il momento statico delle striscioline è rappresentato dalle aree dei due triangoli, per cui si ha:

per il triangolo superiore $S_{ts} = \frac{b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{b \cdot h^2}{8}$

per il triangolo inferiore

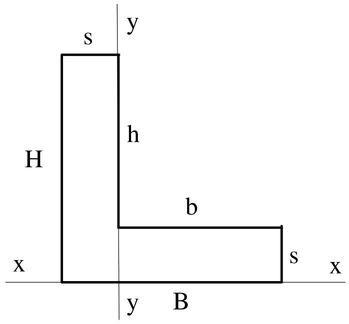
$$S_{ti} = \frac{- b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2}}{2} = -\frac{b \cdot h^2}{8}$$

I momenti statici di queste due aree rappresentano il momento statico del momento statico e cioè il momento d'inerzia:

$$J_{x_0} = S_{t_s} \cdot \frac{h}{3} + S_{t_i} \cdot \left(-\frac{h}{3}\right) = \frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \frac{h}{3} + \left(-\frac{b \cdot h^2}{8}\right) \cdot \left(-\frac{h}{3}\right) = \frac{b \cdot h^3}{24} + \frac{b \cdot h^3}{24} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

ESERCIZI SUI MOMENTI D'INERZIA

Calcolare i momenti d'inerzia assiali della sezione a L rappresentata in figura rispetto agli assi x e y.

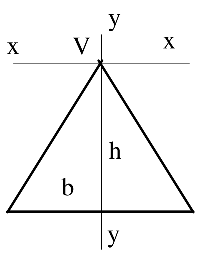


Si suddivide la figura nei due rettangoli (H x s) e (b x s), si calcolano i momenti d'inerzia dei singoli rettangoli rispetto allo stesso asse (asse passante per la base) e poi se ne calcola la somma.

$$Jx = \frac{s\,H^3}{3} + \frac{b\,s^3}{3}$$

$$Jy = \frac{H\,s^3}{3} + \frac{s\,b^3}{3}$$

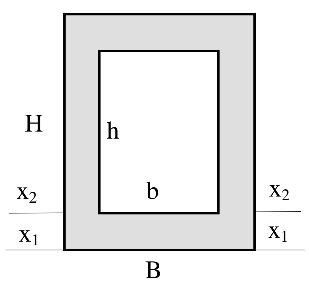
Calcolare il momento d'inerzia polare della sezione triangolare rappresentata in figura rispetto al punto V.



$$J_V = Jx + Jy$$

$$\left.\begin{aligned} Jx &= \frac{b\,h^3}{36} + \frac{b\,h}{2}\left(\frac{2\,h}{3}\right)^2 = \frac{b\,h^3}{4} \\ Jy &= \frac{h\left(\frac{b}{2}\right)^3}{12} + \frac{h\left(\frac{b}{2}\right)^3}{12} = \frac{h\,b^3}{48} \end{aligned}\right\} \Rightarrow J_V = \frac{b\,h^3}{4} + \frac{h\,b^3}{48}$$

Calcolare i momenti d'inerzia assiali della sezione rettangolare cava rappresentata in figura.

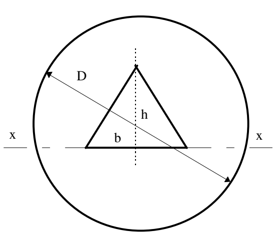


Si suddivide la figura nei due rettangoli (B x H) e (b x h), si calcolano i momenti d'inerzia dei singoli rettangoli rispetto allo stesso asse e poi se ne calcola la differenza.

$$Jx_1 = \frac{B\,H^3}{3} - \left[\frac{b\,h^3}{12} + b\,h\left(\frac{H}{2}\right)^2\right]$$

$$Jx_2 = \frac{B\,H^3}{12} + B\,H\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{b\,h^3}{3}$$

Calcolare il momento d'inerzia assiale della piastra circolare con un foro triangolare rispetto all'asse passante per la base del triangolo (i baricentri del cerchio e del triangolo coincidono).

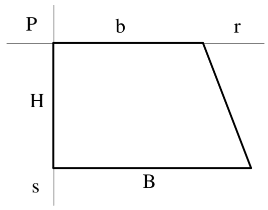


Si suddivide la figura in un cerchio e in un triangolo, si calcolano i momenti d'inerzia delle singole figure rispetto allo stesso asse e poi se ne calcola la differenza.

$$Jx = \frac{\pi D^4}{64} + \frac{\pi D^2}{4}\left(\frac{h}{3}\right)^2 - \frac{b\,h^3}{12}$$

Calcolare il momento d'inerzia polare del trapezio in figura rispetto al punto P.

Si divide la figura in un rettangolo e in un triangolo e si procede come segue:



$$J_P = Jr + Js \qquad \text{con}$$

$$Jr = \frac{b\,H^3}{3} + \frac{(B-b)\,H^3}{36} + \frac{(B-b)\,H}{2}\left(\frac{2\,H}{3}\right)^2$$

$$Js = \frac{H\,b^3}{3} + \frac{H\,(B-b)^3}{36} + \frac{(B-b)\,H}{2}\left(b + \frac{B-b}{3}\right)^2$$