

1 Teoria dello strato limite

1.1 Introduzione

In generale la determinazione del campo di moto intorno ad un oggetto o all'interno di un canale si può ottenere risolvendo le equazioni di conservazione di massa, quantità di moto ed energia (equazioni di Navier–Stokes). Tuttavia, tale approccio presenta notevoli difficoltà; pertanto sono stati sviluppati approcci alternativi che consentano la semplificazione delle equazioni da risolvere, pur preservando la fisica del fenomeno in esame. Nelle applicazioni aeronautiche un tale approccio è possibile adottando il concetto di *strato limite*. Secondo la teoria dello strato limite di Prandtl, si possono identificare due regioni distinte nei flussi ad elevato numero di Reynolds, Re . Nella prima di queste regioni gli effetti viscosi e di scambio termico sono trascurabili e pertanto il campo di moto è governato con buona approssimazione dalle equazioni di Eulero. Nella seconda regione, invece, che risulta in generale molto piccola (scie e strati limite), sono presenti elevati gradienti di flusso (in direzione perpendicolare alle pareti) e gli effetti viscosi sono rilevanti. Infatti, nel caso di flussi in cui la distribuzione di pressione risulta ben approssimata da quella che si ottiene usando l'ipotesi di fluido non viscoso, come il flusso intorno ad un profilo alare a bassa incidenza, l'influenza della viscosità per alti Re è confinata in una regione molto sottile in prossimità delle pareti solide. In tale regione la velocità del fluido aumenta dal valore nullo a parete (su cui vale la condizione di aderenza) a quello corrispondente al flusso esterno non viscoso. Ad esempio, la figura 1.1 riproduce l'evoluzione qualitativa

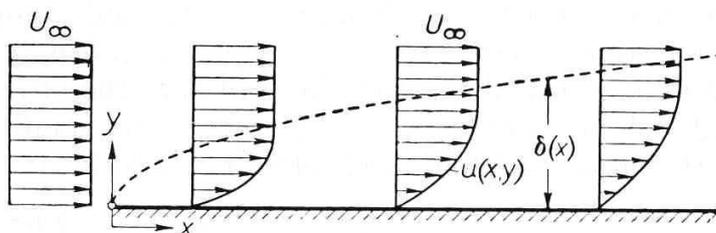


Figura 1.1: Sviluppo dello strato limite su una lamina piana ad incidenza nulla.

del flusso su una lastra piana ad incidenza nulla. Si nota la presenza di uno strato limite a parete in cui la velocità risulta più piccola rispetto a quella del flusso indisturbato. Si nota, inoltre, come lo spessore della strato limite, δ , aumenti nella direzione del flusso, x , per effetto della maggior quantità di fluido interessata dagli effetti viscosi. Ovviamente, lo spessore dello strato limite diminuisce con la viscosità del fluido. D'altra parte, anche in presenza di bassi valori della viscosità (alti valori di Re) lo sforzo di taglio, $\tau = \mu \partial u / \partial y$, risulta elevato nello strato limite a causa dell'elevato gradiente di velocità (in direzione perpendicolare alla parete), mentre al di fuori dello strato limite è trascurabile.

In alcuni flussi lo spessore dello strato limite aumenta in maniera considerevole e si può avere flusso inverso. In tali situazioni le particelle dello strato limite vengono spinte verso l'esterno e si ha la *separazione* dello strato limite. Tale fenomeno è sempre seguito dalla formazione di vortici e ampie zone di ricircolazione con elevate perdite di energia e la teoria dello strato limite non è più applicabile. Esso si verifica nei flussi intorno a corpi tozzi (come cilindri circolari e sfere) che presentano ampie zone di flusso decelerato (scie) in cui la pressione risulta sensibilmente più bassa rispetto a quella che si avrebbe nel corrispondente flusso non viscoso. L'elevato coefficiente di resistenza di tali corpi è principalmente dovuto alla presenza di questa zona a bassa pressione causata dalla separazione.

La definizione di *spessore dello strato limite*, δ , è in qualche modo arbitraria in quanto la transizione dalla velocità a parete a quella del flusso indisturbato avviene in maniera asintotica. Tuttavia, la velocità nello strato limite assume un valore molto prossimo a quello del flusso esterno già ad una distanza molto piccola dalla parete. Quindi è possibile definire lo spessore dello strato limite come la distanza da parete a cui la velocità differisce dell'1% dal valore all'esterno. Al posto di tale misura si può usare una misura alternativa, detta *spessore di spostamento*, δ_1 , definito dalla seguente relazione:

$$U \delta_1 = \int_{y=0}^{\infty} (U - u) dy, \quad (1.1)$$

dove U indica la velocità del flusso indisturbato all'esterno dello strato limite e $u = u(y)$ la velocità (parallela alla parete) nello strato limite (vedi figura 1.2). Lo spessore di

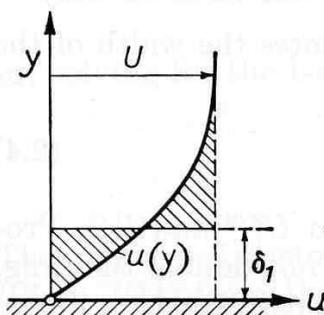


Figura 1.2: Spessore di spostamento.

spostamento indica il difetto di massa, rispetto al flusso non viscoso, causato dalla presenza dello strato limite, quindi rappresenta la distanza a cui dovrebbe essere spostata la parete in un flusso non viscoso per avere la stessa portata¹.

¹Si noti che tale interpretazione è rigorosa solo nel caso di flusso incomprimibile, mentre per flussi comprimibili bisogna correggere la definizione di δ_1 per conteggiare la variazione di densità nello strato limite.

Per ottenere una stima dello spessore dello strato limite, δ , si può considerare che le forze d'attrito, mentre nella regione di flusso al suo interno sono dello stesso ordine di grandezza rispetto a quelle d'inerzia, a causa dell'elevato Re , risultano trascurabili al suo esterno. La forza d'inerzia per unità di volume è pari a $\rho u \partial u / \partial x$, quindi di ordine $\rho U^2 / L$, avendo indicato con U ed L la velocità e la lunghezza di riferimento del flusso. La forza d'attrito per unità di volume risulta $\partial \tau / \partial y$ che, nell'ipotesi di flusso laminare, è pari a $\mu \partial^2 u / \partial y^2$. Il gradiente di velocità in direzione perpendicolare alla parete, $\partial u / \partial y$, è di ordine U / δ , per cui la forza d'attrito per unità di volume è proporzionale a $\mu U / \delta^2$. Uguagliando le espressioni così ottenute per le forze d'inerzia e di attrito si ha:

$$\mu \frac{U}{\delta^2} \sim \frac{\rho U^2}{L}, \quad (1.2)$$

da cui, risolvendo per δ , si ha:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu L}{\rho U}} = \sqrt{\frac{\nu L}{U}}. \quad (1.3)$$

Il fattore di proporzionalità resta al momento indeterminato, ma sarà ricavato nel seguito. Lo spessore di strato limite adimensionale, riferito ad L , si scrive:

$$\frac{\delta}{L} \sim \sqrt{\frac{\nu}{U L}} = \frac{1}{\sqrt{Re_L}}, \quad (1.4)$$

dove Re_L indica il numero di Reynolds riferito alla lunghezza L . Dall'equazione (1.3) si vede come δ sia proporzionale alla radice quadrata di L e di ν . Inoltre, se in tale equazione si sostituisce ad L la distanza x dal bordo d'attacco, si vede come δ sia proporzionale alla radice quadrata di x . Dall'equazione (1.4) si nota, inoltre, come δ / L diminuisca al crescere del numero di Reynolds e, nel caso limite di Re tendente all'infinito, esso tenda a zero.

Quando la velocità del flusso indisturbato è sufficientemente elevata, il flusso lungo una parete può subire la transizione da laminare a turbolento. Nel flusso su una lamina piana tale transizione si può individuare chiaramente attraverso un improvviso incremento dello spessore dello strato limite e dello sforzo di taglio a parete. Secondo l'equazione (1.3), in cui si sostituisce la coordinata locale x ad L , la quantità adimensionale $\delta / \sqrt{\nu x / U}$ risulta costante per flusso laminare (tale costante è all'incirca pari a 5). La figura 1.3 mostra l'andamento di tale parametro adimensionale in funzione del numero di Reynolds $Re_x = U x / \nu$: per $Re_x > 3.2 \cdot 10^5$ si osserva una transizione dall'andamento costante ad uno crescente linearmente, caratteristico del passaggio del flusso da laminare a turbolento. In generale lo spessore di uno strato limite turbolento risulta maggiore di quello di uno strato limite laminare. Per flusso su una lamina piana ad incidenza nulla lo spessore dello strato limite turbolento è proporzionale a $x^{0.8}$. Infatti, come verrà ricavato successivamente, si ha:

$$\frac{\delta}{L} \sim \left(\frac{U L}{\nu} \right)^{-1/5} = Re_L^{-1/5}. \quad (1.5)$$

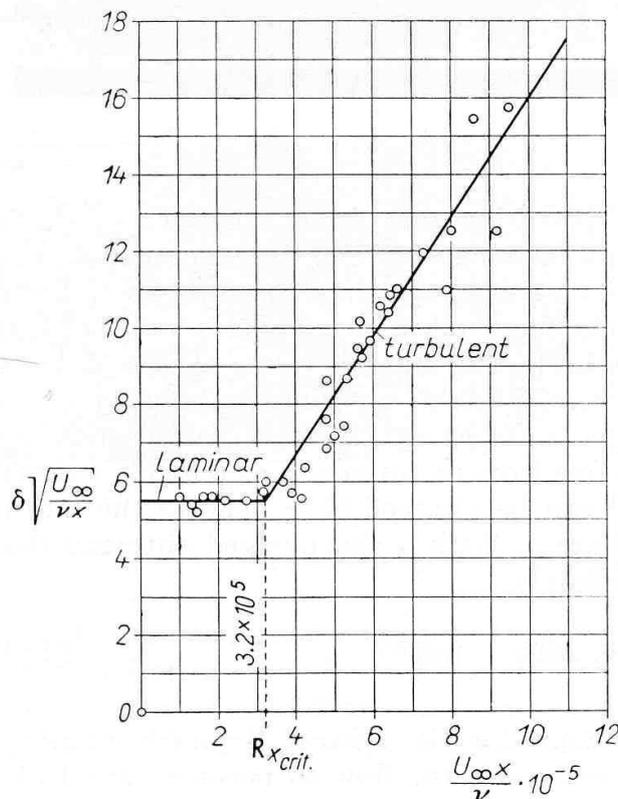


Figura 1.3: Distribuzione dello spessore dello strato al variare di Re_x per il flusso su una lamina piana ad incidenza nulla (Hansen, 1928).

1.2 Flusso laminare bidimensionale

1.2.1 Flusso incomprimibile su una lamina piana

Come già osservato in precedenza, nei flussi ad elevato Re e in assenza di zone di separazione, la velocità è dello stesso ordine di grandezza di quella del flusso indisturbato, V , ad eccezione della regione in prossimità delle pareti, e le linee di flusso sono molto simili a quelle del flusso potenziale. Tuttavia, nel caso reale il fluido aderisce alle pareti e il passaggio dalla velocità nulla a V avviene in una zona molto sottile, denominata strato limite. In questo modo si identificano due regioni ben distinte:

- quella dello strato limite, posta in prossimità delle pareti, in cui il gradiente di velocità in direzione perpendicolare alla parete risulta elevato e, pur in presenza di bassi valori della viscosità μ , gli sforzi viscosi sono rilevanti;
- nella rimanente regione fluida i gradienti di velocità sono relativamente piccoli e

l'effetto della viscosità risulta trascurabile, per cui il flusso può considerarsi non viscoso.

Poiché lo spessore dello strato limite è proporzionale alla radice quadrata della viscosità cinematica, si può concludere che esso diminuisce con ν o, in generale, all'aumentare di Re . Pertanto, nell'ipotesi di numero di Reynolds molto elevato, le equazioni di Navier–Stokes all'interno dello strato limite possono essere semplificate assumendo che lo spessore dello strato limite sia molto più piccolo di una qualche dimensione caratteristica del flusso, L : $\delta \ll L$. Descriveremo questo procedimento facendo riferimento, per semplicità, al caso del flusso su una lamina piana ad incidenza nulla, in cui la direzione del flusso indisturbato, parallela a quella della lamina, coincida con l'asse x . Nel caso di flusso bidimensionale non stazionario il vettore velocità \mathbf{u} in un riferimento cartesiano si scrive:

$$\mathbf{u} = u(x, y, t) \mathbf{i} + v(x, y, t) \mathbf{j}$$

e le equazioni di Navier–Stokes per flusso incomprimibile in forma adimensionale si scrivono:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.8)$$

dove il numero di Reynolds è definito come

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu}.$$

Lo spessore dello strato limite adimensionalizzato, per cui si userà ancora il simbolo δ , è una quantità molto più piccola dell'unità, $\delta \ll 1$, e si può condurre un'analisi degli ordini di grandezza dei termini nelle equazioni (1.6)-(1.8) all'interno dello strato limite:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.9)$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad \delta \quad \frac{1}{\delta} \quad \delta^2 \quad 1 \quad \frac{1}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (1.10)$$

$$\delta \quad 1 \quad \delta \quad \delta \quad 1 \quad \delta^2 \quad \delta \quad \frac{1}{\delta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1.11)$$

$$1 \quad 1$$

Le condizioni al contorno devono imporre che la velocità sia nulla a parete:

$$u = v = 0 \quad \text{per } y = 0,$$

e che la componente orizzontale della velocità tende al valore indisturbato all'infinito:

$$u = 1 \quad \text{per } y \rightarrow \infty.$$

Poiché $\partial u/\partial x$ è di ordine 1, dall'equazione di continuità si ha che anche $\partial v/\partial y$ è di ordine 1 e quindi, all'interno dello strato limite, v è di ordine δ , così come $\partial v/\partial x$ e $\partial^2 v/\partial x^2$. Inoltre, $\partial^2 u/\partial x^2$ è di ordine 1. Poiché la componente orizzontale di velocità passa da zero (parete) ad uno (flusso indisturbato) attraverso lo strato limite di spessore δ , si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta^2},$$

mentre

$$\frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{\delta}{\delta} \sim 1, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{\delta}{\delta^2} \sim \frac{1}{\delta}.$$

Con questi ordini di grandezza, dalla componente orizzontale dell'equazione della quantità di moto si deduce che le forze d'inerzia sono dello stesso ordine di grandezza delle forze d'attrito solo se Re è di ordine $1/\delta^2$. Pertanto l'equazione (1.9) si può semplificare trascurando il termine $\partial^2 u/\partial x^2$ rispetto a $\partial^2 u/\partial y^2$, mentre l'equazione di continuità (1.11) resta inalterata. Dall'equazione (1.10) si deduce che $\partial p/\partial y$ è di ordine δ , per cui la variazione di pressione attraverso lo strato limite sarebbe di ordine δ^2 , quindi trascurabile. Infatti, si assume che la pressione nello strato limite sia costante e pari a quella che regna all'esterno, determinata dal flusso non viscoso: la pressione risulta quindi una funzione nota del problema, $p = p(x, t)$.

Al bordo esterno dello strato limite, u diventa uguale a $U(x, t)$ e poiché in tale regione i termini viscosi nell'equazione (1.9) sono trascurabili, si ha:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1.12)$$

Nel caso di flusso stazionario questa espressione si semplifica ulteriormente:

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}, \quad (1.13)$$

che, integrata, costituisce l'equazione di Bernoulli:

$$p + \frac{1}{2} \rho U^2 = \text{cost.} \quad (1.14)$$

In definitiva, siamo ora in grado di scrivere le equazioni semplificate valide all'interno dello strato limite, note come *equazioni dello strato limite di Prandtl*.² Riadottando le quantità dimensionali, si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.16)$$

con le condizioni al contorno

$$y = 0 : u = v = 0; \quad y = \infty : u = U(x, t), \quad (1.17)$$

e opportune condizioni iniziali. In questo modo il flusso potenziale all'esterno dello strato limite $(U(x, t), p(x, t))$ deve considerarsi noto.

Nel caso di *flusso stazionario* le equazioni appena ricavate si semplificano ulteriormente:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.19)$$

con le condizioni al contorno

$$y = 0 : u = v = 0; \quad y = \infty : u = U(x). \quad (1.20)$$

La semplificazione introdotta è notevole in quanto il problema in esame presenta solo due equazioni nelle incognite u e v , mentre la pressione è un dato. Inoltre, dalla considerazione che Re risulta inversamente proporzionale al quadrato dello spessore dello strato limite adimensionale, segue che:

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}} = \sqrt{\frac{\nu}{VL}}, \quad (1.21)$$

da cui $\delta \sim \sqrt{\nu}$, come precedentemente ricavato.

Prima di passare alla risoluzione delle equazioni dello strato limite, è utile fare alcune considerazioni a proposito della separazione. In particolare è importante definire in quali circostanze il flusso può separare. In presenza di un flusso in prossimità di una parete con gradiente di pressione avverso, le particelle nello strato limite non possono procedere molto oltre nella regione di pressione maggiore a causa della loro bassa energia cinetica; pertanto, alcune particelle si muoveranno nella direzione opposta a quella del flusso principale e lo strato limite devierà dalla parete spostandosi nella regione del flusso principale. In generale, le particelle fluide dopo il punto di separazione seguono la direzione impressa loro dal gradiente di pressione e si muovono in direzione opposta a quella della corrente

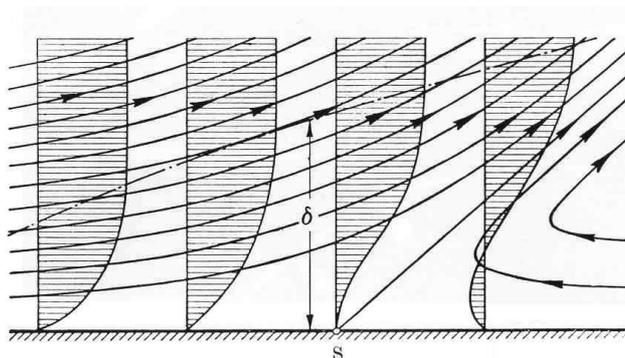


Figura 1.4: Separazione dello strato limite su una lamina piana

principale, vedi figura 1.4. Il punto di separazione è definito come la condizione limite in cui il flusso cambia direzione nelle immediate vicinanze della parete,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0. \quad (1.22)$$

Per poter sapere quando si ha la separazione bisognerà risolvere le equazioni dello strato limite. In generale, tali equazioni sono valide sino al punto di separazione: a valle di esso lo strato limite diventa troppo grande e le assunzioni fatte per ricavare le suddette equazioni non sono più valide. Il ruolo fondamentale giocato dal gradiente di pressione avverso ($dp/dx > 0$) sulla separazione si può rilevare se si considera che per $y = 0$ l'equazione (1.18) diventa:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{dp}{dx}, \quad (1.23)$$

da cui, differenziando rispetto ad y ,

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{y=0} = 0. \quad (1.24)$$

Quindi, nelle immediate vicinanze della parete la curvatura del profilo di velocità dipende solo dal gradiente di pressione e la curvatura a parete cambia col segno del gradiente di pressione. Nel caso di diminuzione della pressione ($dp/dx < 0$, accelerazione del flusso) si ha che $(\partial^2 u / \partial y^2)_{y=0} < 0$ e quindi $\partial^2 u / \partial y^2 < 0$ nell'intero strato limite. Viceversa, in presenza di un incremento della pressione ($dp/dx > 0$, decelerazione del flusso), $(\partial^2 u / \partial y^2)_{y=0} > 0$; tuttavia, poiché in prossimità del bordo dello strato limite $\partial^2 u / \partial y^2 < 0$, esisterà un punto in cui $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$, cioè un punto di flesso nel grafico del profilo di velocità con la possibilità di separazione.

²Nel ricavare le equazioni dello strato limite si è fatto riferimento al caso del flusso su una lamina piana. Tuttavia, lo stesso procedimento può essere esteso al caso di pareti curve con piccole variazioni della curvatura.

Il caso più semplice in cui affrontare la risoluzione delle equazioni dello strato limite è quello del flusso su una lamina piana di spessore infinitamente sottile. Individuato il bordo d'attacco della lamina come l'origine del riferimento cartesiano, $x = y = 0$, si assume che la lamina sia parallela all'asse x , vedi figura 1.5. Si consideri il caso di flusso

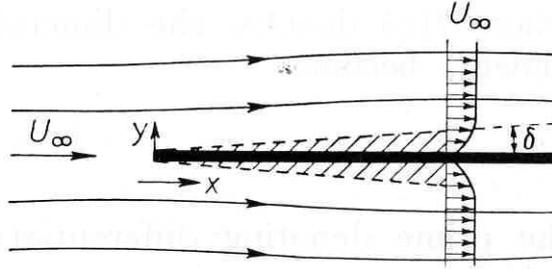


Figura 1.5: Strato limite lungo una lamina piana ad incidenza nulla

stazionario con velocità indisturbata di modulo U_∞ nella direzione dell'asse x . In questo caso $dp/dx = 0$ e le equazioni (1.18) e (1.19) si scrivono:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.26)$$

con

$$y = 0 : u = v = 0; \quad y = \infty : u = U_\infty. \quad (1.27)$$

In questo caso si può supporre che i profili di velocità $u(y)$ a diverse distanze x dal bordo d'attacco risultino identici purché si usino degli opportuni fattori di scala per u e y . Tali fattori risultano pari a U_∞ e $\delta(x)$, rispettivamente. Quindi per i profili di velocità nello strato limite si ha:

$$\frac{u}{U_\infty} = \phi\left(\frac{y}{\delta}\right).$$

Si introduce la coordinata adimensionale

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (1.28)$$

e la funzione di corrente

$$\psi = \sqrt{U_\infty \nu x} f(\eta), \quad (1.29)$$

dove $f(\eta)$ indica la funzione di corrente adimensionale. In questo modo l'equazione di continuità risulta identicamente soddisfatta e le componenti di velocità si scrivono:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty f'(\eta), \quad (1.30)$$

in cui $f'(\eta)$ indica la derivata prima di f rispetto ad η ; analogamente

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} [\eta f'(\eta) - f(\eta)]. \quad (1.31)$$

Usando tali relazioni, l'equazione (1.25) si scrive:

$$-\frac{U_\infty^2}{2x}\eta f' f'' + \frac{U_\infty^2}{2x}(\eta f' - f) f'' = \nu \frac{U_\infty^2}{\nu x} f''', \quad (1.32)$$

che si semplifica nella forma seguente

$$f f'' + 2f''' = 0, \quad (1.33)$$

con le condizioni al contorno:

$$\eta = 0 : f = 0, \quad f' = 0; \quad \eta = \infty : f' = 1. \quad (1.34)$$

In questo modo, grazie all'introduzione delle variabili autosimilari, il problema è stato ridotto alla soluzione di un'unica equazione differenziale ordinaria, la cui soluzione analitica è stata ottenuta per la prima volta da Blasius attraverso un complesso procedimento matematico. La tabella 1 riporta i valori di f , $f' = u/U_\infty$ e f'' per valori discreti di η . La variazione di u/U_∞ è riportata in figura 1.6. La componente verticale di velocità è invece

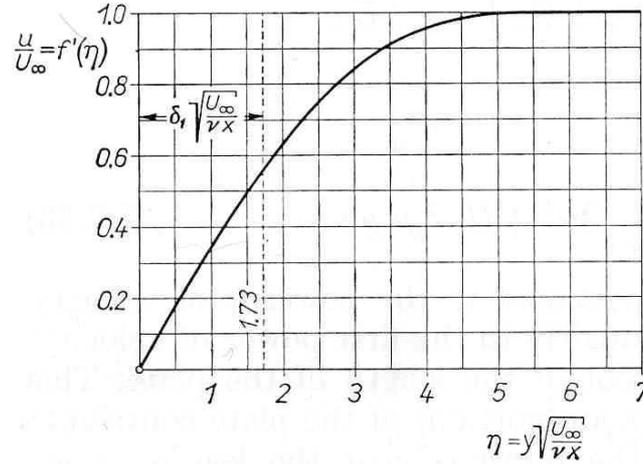


Figura 1.6: Componente orizzontale della velocità nello strato limite lungo una lamina piana (Blasius, 1908).

fornita in figura 1.7: si noti come al bordo dello strato limite, $\eta \rightarrow \infty$, tale componente sia diversa da zero:

$$v_\infty = 0.8604 U_\infty \sqrt{\frac{\nu}{x U_\infty}}.$$

| $\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$ | f | $f' = \frac{u}{U_\infty}$ | f'' |
|---|---------|---------------------------|---------|
| 0.0 | 0.00000 | 0.00000 | 0.33206 |
| 0.2 | 0.00664 | 0.06641 | 0.33198 |
| 0.4 | 0.02656 | 0.13276 | 0.33147 |
| 0.6 | 0.05973 | 0.19894 | 0.33008 |
| 0.8 | 0.10611 | 0.26471 | 0.32739 |
| 1.0 | 0.16557 | 0.32978 | 0.32301 |
| 1.2 | 0.23795 | 0.39378 | 0.31659 |
| 1.4 | 0.32298 | 0.45626 | 0.30787 |
| 1.6 | 0.42032 | 0.51676 | 0.29666 |
| 1.8 | 0.52952 | 0.57476 | 0.28293 |
| 2.0 | 0.65002 | 0.62977 | 0.26675 |
| 2.2 | 0.78119 | 0.68131 | 0.24835 |
| 2.4 | 0.92229 | 0.72898 | 0.22809 |
| 2.6 | 1.07251 | 0.77246 | 0.20645 |
| 2.8 | 1.23098 | 0.81151 | 0.18401 |
| 3.0 | 1.39681 | 0.84604 | 0.16136 |
| 3.2 | 1.56909 | 0.87608 | 0.13913 |
| 3.4 | 1.74695 | 0.90176 | 0.11788 |
| 3.6 | 1.92953 | 0.92333 | 0.09809 |
| 3.8 | 2.11603 | 0.94112 | 0.08013 |
| 4.0 | 2.30575 | 0.95552 | 0.06423 |
| 4.2 | 2.49804 | 0.96696 | 0.05052 |
| 4.4 | 2.69236 | 0.97587 | 0.03897 |
| 4.6 | 2.88825 | 0.98268 | 0.02948 |
| 4.8 | 3.08532 | 0.98779 | 0.02187 |
| 5.0 | 3.28327 | 0.99154 | 0.01591 |
| 5.2 | 3.48187 | 0.99425 | 0.01134 |
| 5.4 | 3.68092 | 0.99616 | 0.00793 |
| 5.6 | 3.88029 | 0.99748 | 0.00543 |
| 5.8 | 4.07988 | 0.99838 | 0.00365 |
| 6.0 | 4.27962 | 0.99897 | 0.00240 |
| 6.2 | 4.47946 | 0.99936 | 0.00155 |
| 6.4 | 4.67936 | 0.99961 | 0.00098 |
| 6.6 | 4.87930 | 0.99977 | 0.00061 |
| 6.8 | 5.07926 | 0.99986 | 0.00037 |
| 7.0 | 5.27924 | 0.99992 | 0.00022 |
| 7.2 | 5.47923 | 0.99996 | 0.00013 |
| 7.4 | 5.67922 | 0.99998 | 0.00007 |
| 7.6 | 5.87922 | 0.99999 | 0.00004 |
| 7.8 | 6.07921 | 0.99999 | 0.00002 |
| 8.0 | 6.27921 | 1.00000 | 0.00001 |
| 8.2 | 6.47921 | 1.00000 | 0.00001 |
| 8.4 | 6.67921 | 1.00000 | 0.00000 |
| 8.6 | 6.87921 | 1.00000 | 0.00000 |
| 8.8 | 7.07921 | 1.00000 | 0.00000 |
| 9.0 | 7.27921 | 1.00000 | 0.00000 |

Tabella 1: Strato limite su una lamina piana con gradiente di pressione nullo.

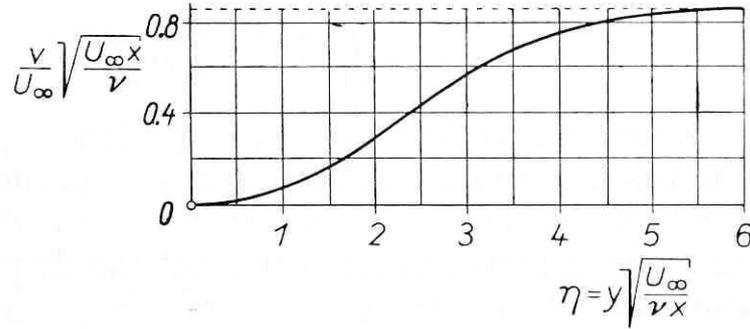


Figura 1.7: Componente verticale della velocità nello strato limite lungo una lamina piana. (Blasius, 1908)

A questo punto dell'analisi si può determinare la resistenza su uno dei lati della lastra come:

$$D = b \int_{x=0}^L \tau_0 dx, \quad (1.35)$$

dove b indica la profondità e L la lunghezza della lastra. Lo sforzo d'attrito a parete vale:

$$\tau_0(x) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} f''(0) = 0.332 \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}, \quad (1.36)$$

dove $f''(0) = 0.332$. Il coefficiente d'attrito vale quindi:

$$c_f = \frac{\tau_0(x)}{1/2 \rho U_\infty^2} = 0.664 \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}} = \frac{0.664}{\sqrt{Re}}. \quad (1.37)$$

Quindi, utilizzando l'equazione (1.35) si ha:

$$D = 0.332 \mu b U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} \int_{x=0}^L \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0.664 b U_\infty \sqrt{\mu \rho L U_\infty}. \quad (1.38)$$

La resistenza complessiva (somma di quella sulle due facce) vale:

$$2D = 1.328 b \sqrt{\mu \rho L U_\infty^3}. \quad (1.39)$$

Si noti che la resistenza aumenta con la radice quadrata della lunghezza: questo implica che il contributo principale alla resistenza viene fornito dalle regioni più vicine al bordo

d'attacco dove lo strato limite è più sottile e, di conseguenza, lo sforzo d'attrito a parete risulta maggiore. Come di consueto, si può definire il coefficiente di resistenza come

$$c_d = \frac{2D}{1/2 \rho U_\infty^2 S}$$

dove la superficie di riferimento vale $S = 2bL$. Quindi, usando l'equazione (1.39), si ha:

$$c_d = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}}, \quad (1.40)$$

dove $Re_L = U_\infty L/\nu$. Queste relazioni sono valide per regime di flusso laminare, vale a dire per valori di Re_L minori di $5 \cdot 10^5 \div 10^6$. Per flussi turbolenti, $Re > 10^6$, la resistenza diventa notevolmente maggiore di quella fornita dall'equazione (1.40), come sarà discusso nel seguito.

Alla luce dei risultati ottenuti è ora possibile determinare lo spessore dello strato limite. La componente orizzontale della velocità, u , tende in maniera asintotica al valore U_∞ del flusso potenziale (la funzione f' tende asintoticamente ad 1). Poiché si è definito lo spessore dello strato limite la distanza dalla parete dove $u = 0.99 U_\infty$, dalla tabella 1 si osserva che questo avviene quando $\eta \approx 5$; pertanto lo spessore dello strato limite diventa:

$$\delta \approx 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}. \quad (1.41)$$

Lo spessore di spostamento, definito dall'equazione (1.1), si scrive:

$$U_\infty \delta_1 = \int_{y=0}^{\infty} (U_\infty - u) dy, \quad \implies \quad \delta_1 = \int_{y=0}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy; \quad (1.42)$$

poiché $u/U_\infty = f'(\eta)$, si ha:

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \int_{\eta=0}^{\infty} [1 - f'(\eta)] d\eta = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} [\eta_1 - f(\eta_1)], \quad (1.43)$$

dove η_1 indica un punto all'esterno dello strato limite. Dalla tabella 1 si vede come $\eta_1 - f(\eta_1) = 1.7208$, per cui lo spessore di spostamento vale:

$$\delta_1 = 1.7208 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}. \quad (1.44)$$

Un'ulteriore grandezza notevole nello studio dello strato limite è lo *spessore di quantità di moto*, δ_2 , che esprime la perdita di quantità di moto rispetto al flusso potenziale, $\rho \int_0^{\infty} u(U_\infty - u) dy$; la sua espressione è la seguente:

$$\rho U_\infty^2 \delta_2 = \rho \int_{y=0}^{\infty} u(U_\infty - u) dy \quad \implies \quad \delta_2 = \int_{y=0}^{\infty} \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy. \quad (1.45)$$

Nel caso della lamina piana ad incidenza nulla, lo spessore di quantità di moto assume la forma seguente³:

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \int_{\eta=0}^{\infty} f'(\eta) [1 - f'(\eta)] d\eta \implies \delta_2 = 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}. \quad (1.46)$$

È importante notare come al bordo d'attacco della lamina la teoria dello strato limite non sia valida, in quanto l'ipotesi che $|\partial^2 u / \partial x^2| \ll |\partial^2 u / \partial y^2|$ non è soddisfatta, essendo questo un punto singolare.

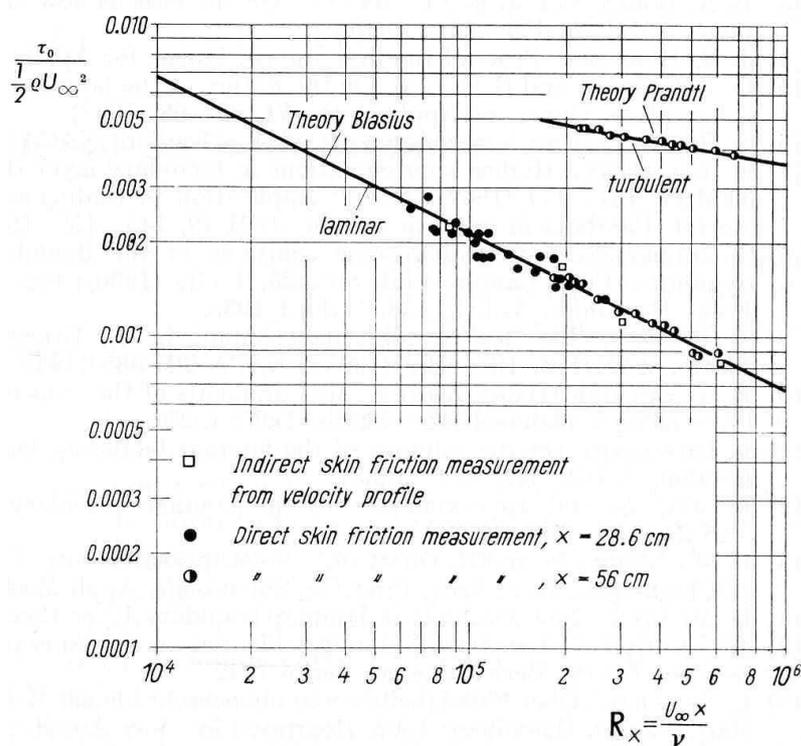


Figura 1.8: Coefficiente di attrito lungo una lamina piana ad incidenza nulla: confronto tra risultati analitici e sperimentali (Liepmann & Dhawan, 1951).

I risultati della teoria sopra esposta risultano in ottimo accordo con i dati sperimentali. In particolare, la figura 1.8 mostra la variazione del coefficiente d'attrito in funzione di Re_x . Nel regime laminare il confronto tra le misure e l'espressione (1.37) è eccellente, a conferma della teoria. Si noti, infine, che per $2 \cdot 10^5 < Re_x < 6 \cdot 10^5$ sono possibili sia il flusso laminare che quello turbolento.

³Per ottenere la forma finale di δ_2 , si è utilizzata l'integrazione per parti di $\int f'^2 d\eta$ unitamente all'equazione (1.33)

1.2.2 Proprietà generali delle equazioni dello strato limite*

Le assunzioni alla base delle equazioni dello strato limite risultano tanto più accurate quanto maggiore è il numero di Reynolds. Pertanto, la teoria dello strato limite può essere considerata come un processo di integrazione asintotica delle equazioni di Navier–Stokes per Re molto elevati. Questo porta ad analizzare la relazione tra le caratteristiche dello strato limite ed il numero di Reynolds. A questo proposito si ricordi che nel ricavare le equazioni dello strato limite si è fatto riferimento a quantità adimensionali, assumendo come grandezze di riferimento la velocità del flusso indisturbato, U_∞ , e una lunghezza caratteristica del corpo, L . Indicando le grandezze adimensionali con un apice, si ha:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = U' \frac{dU'}{dx'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \quad (1.47)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0, \quad (1.48)$$

$$y' = 0 : \quad u' = v' = 0; \quad y' = \infty : \quad u' = U'(x'). \quad (1.49)$$

Si noti che la soluzione delle equazioni dello strato limite dipende da $Re = U_\infty L/\nu$, noti $U'(x')$ e la geometria del corpo. Un'ulteriore trasformazione consente di eliminare anche la dipendenza da Re . Ponendo:

$$v'' = v' \sqrt{Re} = \frac{v}{U_\infty} \sqrt{\frac{U_\infty L}{\nu}}, \quad (1.50)$$

$$y'' = y' \sqrt{Re} = \frac{y}{L} \sqrt{\frac{U_\infty L}{\nu}}, \quad (1.51)$$

le equazioni dello strato limite si possono riscrivere come segue:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v'' \frac{\partial u'}{\partial y''} = U' \frac{dU'}{dx'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2}, \quad (1.52)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v''}{\partial y''} = 0, \quad (1.53)$$

$$y'' = 0 : \quad u' = v'' = 0; \quad y'' = \infty : \quad u' = U'(x'); \quad (1.54)$$

queste equazioni e la corrispondente soluzione non dipendono dal numero di Reynolds. Infatti, per un dato corpo, le componenti adimensionali della velocità u'/U_∞ e $(v''/U_\infty)(U_\infty L/\nu)^{1/2}$ dipendono dalle coordinate adimensionali x'/L e $(y''/L)(U_\infty L/\nu)^{1/2}$, e tali relazioni sono indipendenti dal numero di Reynolds. Pertanto basterà risolvere una sola volta tali equazioni in funzione delle grandezze adimensionali sopra definite: tale soluzione sarà valida per ogni Re nel caso di flusso laminare.

Un ulteriore aspetto rilevante riguarda le condizioni per cui due soluzioni delle equazioni dello strato limite possono essere considerate “simili”. Con questo si intende soluzioni

per cui la componente u di velocità presenta due profili $u(x, y)$ a diverse posizioni x che differiscono solo per un fattore di scala per u e y . Pertanto i profili della velocità u a diversi valori di x sono congruenti se diagrammati in termini di quantità adimensionali ottenute attraverso opportune grandezze di riferimento. La condizione può essere scritta nel modo seguente:

$$\frac{u\{x_1, [y/g(x_1)]\}}{U(x_1)} = \frac{u\{x_2, [y/g(x_2)]\}}{U(x_2)}. \quad (1.55)$$

La soluzione dello strato limite su lamina piana ad incidenza nulla possiede tale proprietà. La velocità del flusso indisturbato U_∞ è il fattore di scala per u , mentre il fattore di scala per y è $g = \sqrt{\nu x/U_\infty}$. Tutti i profili di velocità coincidono se riportati su un grafico di u/U_∞ in funzione di $y/g = y\sqrt{U_\infty/(\nu x)} = \eta$. L'importanza di questa proprietà risiede nel fatto che in tal caso è possibile ridurre il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che governano il fenomeno ad un'unica equazione differenziale ordinaria, con conseguente semplificazione del problema, come visto nel caso di lamina piana con gradiente di pressione nullo.

Ci chiediamo ora quali flussi potenziali consentano di avere soluzioni autosimilari delle equazioni dello strato limite. Il punto di partenza è rappresentato dalle equazioni dello strato limite:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.57)$$

$$y = 0 : \quad u = v = 0; \quad y = \infty : \quad u = U. \quad (1.58)$$

Introducendo al funzione di corrente $\psi(x, y)$,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1.59)$$

l'equazione del moto si scrive:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (1.60)$$

Usando L e U_∞ come lunghezza e velocità di riferimento, si possono definire le seguenti coordinate adimensionali:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y\sqrt{Re}}{Lg(x)}. \quad (1.61)$$

La funzione di corrente adimensionale si scrive:

$$f(\xi, \eta) = \frac{\psi(x, y)\sqrt{Re}}{LU(x)g(x)}. \quad (1.62)$$

Di conseguenza le componenti di velocità si scrivono:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U \frac{\partial f}{\partial \eta} = U f', \quad (1.63)$$

$$-\sqrt{Re} v = \sqrt{Re} \frac{\partial \psi}{\partial x} = L f \frac{d}{dx} (U g) + U g \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} - L \frac{g'}{g} \eta f' \right), \quad (1.64)$$

dove f' indica differenziazione rispetto ad η , mentre g' rispetto ad x . Dalla precedente definizione di soluzioni autosimilari si ha che f deve dipendere solo da η e la dipendenza da ξ deve annullarsi, consentendo di ottenere un'equazione differenziale ordinaria in $f(\eta)$. Introducendo tali grandezze adimensionali nell'equazione del moto si ha:

$$f''' + \alpha f f'' + \beta(1 - f'^2) = \frac{U}{U_\infty} g^2 \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f'}{\partial \xi} \right), \quad (1.65)$$

con

$$\alpha = \frac{L g}{U_\infty} \frac{d}{dx} (U g); \quad \beta = \frac{L}{U_\infty} g^2 \frac{dU}{dx}; \quad (1.66)$$

Affinché si abbiano soluzioni autosimilari l'equazione deve avere il termine a secondo membro pari a zero:

$$f''' + \alpha f f'' + \beta(1 - f'^2) = 0. \quad (1.67)$$

Quindi, dall'equazione (1.66) si ottiene la seguente condizione:

$$2\alpha - \beta = \frac{L}{U_\infty} \frac{d}{dx} (U g^2); \quad (1.68)$$

quindi, per $2\alpha - \beta \neq 0$,

$$\frac{U}{U_\infty} g^2 = (2\alpha - \beta) \frac{x}{L}. \quad (1.69)$$

Si ha, inoltre:

$$\alpha - \beta = \frac{L}{U_\infty} g g' U, \quad (1.70)$$

da cui:

$$(\alpha - \beta) \frac{U'}{U} = \frac{L}{U_\infty} g^2 U' \frac{g'}{g} = \beta \frac{g'}{g}. \quad (1.71)$$

Integrando:

$$\left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{(\alpha - \beta)} = K g^\beta, \quad (1.72)$$

dove K è una costante. Eliminando g dalle equazioni (1.69) e (1.72) si ottiene la distribuzione di velocità del flusso potenziale:

$$\frac{U}{U_\infty} = K^{\frac{2}{2\alpha - \beta}} \left[(2\alpha - \beta) \frac{x}{L} \right]^{\frac{\beta}{2\alpha - \beta}} \quad (1.73)$$

e

$$g = \sqrt{(2\alpha - \beta) \frac{x}{L}} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{-1/2}, \quad (1.74)$$

con $2\alpha - \beta \neq 0$.

Assumendo $\alpha = 1$ e ponendo $m = \beta/(2 - \beta)$, la distribuzione di velocità del flusso potenziale ed il fattore di scala g diventano:

$$\frac{U}{U_\infty} = K^{(1+m)} \left(\frac{2}{1+m} \frac{x}{L} \right)^m \quad (1.75)$$

$$g = \sqrt{\frac{2}{1+m} \frac{x}{L} \frac{U_\infty}{U}}. \quad (1.76)$$

Per adimensionalizzare y si avrà la variabile

$$\eta = y \sqrt{\frac{1+m}{2} \frac{U}{\nu x}}. \quad (1.77)$$

1.2.3 Equazioni integrali dello strato limite

La soluzione delle equazioni differenziali dello strato limite per corpi di forma arbitraria non è sempre possibile. L'introduzione delle equazioni integrali ha lo scopo di fornire uno strumento che consente di risolvere il problema dello strato limite, in maniera approssimata, tutte le volte che la soluzione delle equazioni dello strato limite risulta poco agevole. Limitando l'analisi al caso di flussi stazionari bidimensionali, bisogna integrare le equazioni (1.18) e (1.19) in y tra $y = 0$ (parete) a $y = h$, con h che contiene lo strato limite. Usando l'equazione (1.13) per esprimere dp/dx nell'equazione (1.18), si ha:

$$\int_{y=0}^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U \frac{dU}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_0}{\rho}, \quad (1.78)$$

dove $\tau_0 = \mu(\partial u/\partial y)_0$. Si noti che questa equazione è valida sia per flussi laminari che per flussi turbolenti, purché nel secondo caso u e v indichino le grandezze medie. Usando l'equazione (1.19) si ha:

$$v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy, \quad (1.79)$$

per cui l'equazione (1.78) diventa:

$$\int_{y=0}^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy - U \frac{dU}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_0}{\rho}. \quad (1.80)$$

Il secondo termine al primo membro si può integrare per parti:

$$\int_{y=0}^h \left(\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) dy = U \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy, \quad (1.81)$$

e l'equazione (1.80) si scrive:

$$\int_{y=0}^h \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{dU}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_0}{\rho}. \quad (1.82)$$

Questa equazione si può riscrivere, riarrangiando i termini, come

$$\int_{y=0}^h \frac{\partial}{\partial x} [u(U-u)] dy + \frac{dU}{dx} \int_{y=0}^h (U-u) dy = \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (1.83)$$

Ricordando la definizione di spessore di spostamento, equazione (1.1), e di spessore di quantità di moto, equazione (1.45), l'equazione (1.83) diventa:

$$\frac{d}{dx} (U^2 \delta_2) + \delta_1 U \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho}, \quad (1.84)$$

che viene indicata come *equazione integrale di von Kármán*. Si noti che, nel caso particolare di flusso su una lamina piana ad incidenza nulla, la suddetta equazione si semplifica nel modo seguente:

$$U_\infty^2 \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho}; \quad (1.85)$$

tale relazione si ricava alternativamente osservando che la resistenza può essere espressa sia come difetto di flusso di quantità di moto che come integrale dello sforzo a parete:

$$D(x) = b \rho \int_{y=0}^{\infty} u (U_\infty - u) dy = b \int_0^x \tau_0(x) dx,$$

da cui segue che

$$\tau_0(x) = \rho \frac{d}{dx} \int_{y=0}^{\infty} u (U_\infty - u) dy$$

e, usando la definizione di spessore di quantità di moto, si ricava infine l'equazione (1.85).

L'equazione integrale dello strato limite può essere ricavata applicando le equazioni di conservazione ad un volume di controllo di lunghezza infinitesima dx , compreso tra x e $x+dx$, che si estende per tutto lo strato limite, vedi figura 1.9; tale procedimento viene di

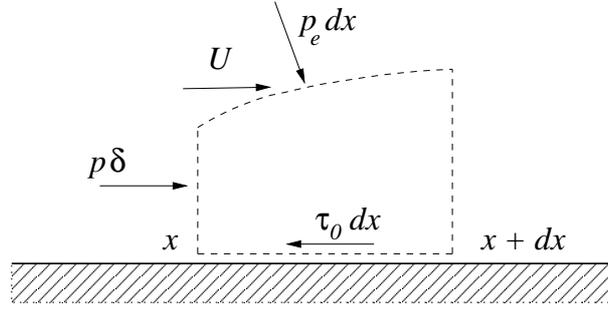


Figura 1.9: Volume di controllo nello strato limite.

seguito riportato in modo da ricavare le equazioni integrali nel caso di flusso comprimibile. Il flusso di massa attraverso le sezioni x e $x + dx$ vale

$$Q_x = - \int_0^{\delta} \rho u dy, \quad Q_{x+dx} = -Q_x - \frac{dQ_x}{dx} dx;$$

quindi, in condizioni stazionarie, il flusso di massa entrante attraverso il bordo dello strato limite vale:

$$Q_e = -Q_{x+dx} - Q_x = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} \rho u dy \right) dx.$$

Si consideri ora la componente lungo x dell'equazione della quantità di moto. La risultante delle forze applicate vale:

$$dF_x = p \delta - \left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) (\delta + d\delta) + \left(p + \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} dx \right) d\delta - \tau_0 dx;$$

semplificando e trascurando i termini del second'ordine, si ha:

$$dF_x = - \left(\frac{dp}{dx} \delta + \tau_0 \right) dx.$$

La componente in x del flusso di quantità di moto attraverso le sezioni x e $x + dx$ vale:

$$M_x = - \int_0^{\delta} \rho u^2 dy, \quad M_{x+dx} = -M_x - \frac{dM_x}{dx} dx;$$

mentre il flusso (lungo x) di quantità di moto entrante attraverso il bordo dello strato limite vale:

$$M_e = U Q_e.$$

In definitiva, la componente in x dell'equazione della quantità di moto si scrive:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \varrho u^2 dy - U \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \varrho u dy = -\frac{dp}{dx} \delta - \tau_0;$$

questa equazione si può riscrivere come:

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} (\varrho u^2 - \varrho u U) dy \right] + \left[\int_0^{\delta} \varrho u dy \right] \frac{dU}{dx} = -\frac{dp}{dx} \delta - \tau_0. \quad (1.86)$$

Considerando le definizioni di spessore di spostamento e di quantità di moto per flussi comprimibili:

$$\delta_1 = \int_{y=0}^{\delta} \left(1 - \frac{\varrho u}{\varrho_1 U} \right) dy, \quad (1.87)$$

$$\delta_2 = \int_{y=0}^{\delta} \frac{\varrho u}{\varrho_1 U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy, \quad (1.88)$$

dove ϱ_1 indica la densità al bordo dello strato limite, l'equazione (1.86) diventa:

$$-\frac{d}{dx} (\varrho_1 U^2 \delta_2) + \varrho_1 U \delta \frac{dU}{dx} - \varrho_1 U \delta_1 \frac{dU}{dx} = -\frac{dp}{dx} \delta - \tau_0. \quad (1.89)$$

Il secondo termine a primo membro è uguale al primo termine a secondo membro in virtù dell'equazione di Bernoulli (1.13), pertanto l'equazione si semplifica ulteriormente come segue:

$$\frac{d}{dx} (\varrho_1 U^2 \delta_2) + \varrho_1 U \delta_1 \frac{dU}{dx} = \tau_0, \quad (1.90)$$

che, nel caso di flusso incomprimibile, risulta identica all'equazione (1.84) precedentemente ricavata.

1.2.4 Soluzione delle equazioni integrali dello strato limite*

L'uso dell'equazione integrale di von Kármán consente di risolvere il problema dello strato limite in maniera approssimata ed in forma integrale, cioè per grandezze mediate sull'intero spessore (δ , δ_1 , c_f , etc.), piuttosto che in ogni punto al suo interno. In tale approccio, l'equazione (1.84) può essere risolta se si assume una forma plausibile del profilo di velocità nello strato limite⁴ che consenta di passare ad un'equazione differenziale ordinaria

⁴La funzione consente di soddisfare le condizioni al contorno del problema (aderenza a parete e valore del flusso indisturbato al bordo dello strato limite). Inoltre, in presenza di un gradiente di pressione diverso da zero, deve essere garantita la possibilità della presenza di punti di flesso e di separazione (derivata prima in y nulla a parete).

facile da risolvere. Il primo e più noto metodo per la soluzione approssimata dell'equazione integrale è quello dovuto a Pohlhausen, che propose la seguente rappresentazione adimensionale del profilo di velocità nello strato limite in funzione di $\eta = y/\delta(x)$:

$$\frac{u}{U} = f(\eta) = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4, \quad \text{per } 0 \leq \eta \leq 1; \quad (1.91)$$

mentre per $\eta > 1$ si assume $u/U = 1$. I quattro coefficienti di tale espressione si determinano imponendo le condizioni al contorno:

$$y = 0: \quad u = 0; \quad \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U \frac{dU}{dx}; \quad (1.92)$$

$$y = \delta: \quad u = U; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1.93)$$

Introducendo la grandezza adimensionale

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU}{dx} \quad (1.94)$$

si ottengono i seguenti valori:

$$a = 2 + \frac{\Lambda}{6}, \quad b = -\frac{\Lambda}{2}, \quad c = -2 + \frac{\Lambda}{2}, \quad d = 1 - \frac{\Lambda}{6}; \quad (1.95)$$

per cui il profilo di velocità si scrive:

$$\frac{u}{U} = F(\eta) + \Lambda G(\eta) = (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) + \frac{\Lambda}{6}(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4). \quad (1.96)$$

Le funzioni $F(\eta)$ e $G(\eta)$ sono riportate nella figura 1.10. In questo modo si è ottenuta una famiglia di curve con un parametro libero, Λ , che può essere interpretato come il rapporto tra forze di pressione e forze viscosse

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU}{dx} = -\frac{dp}{dx} \frac{\delta}{\mu U/\delta}$$

La distribuzione di velocità al variare di Λ è riportata in figura 1.11. Il caso particolare in cui $\Lambda = 0$ corrisponde alla situazione di assenza di gradiente di pressione, ovvero al caso di lamina piana ad incidenza nulla, ed il profilo corrispondente approssima quello di Blasius; per $\Lambda > 0$ il flusso accelera, mentre per $\Lambda < 0$ il flusso decelera. Il profilo che si ha in caso di separazione, $(\partial u/\partial y)_{y=0} = 0$, corrispondente alla condizione $a = 0$, si ha per $\Lambda = -12$. Inoltre, per $\Lambda > 12$ risulterebbe $u/U > 1$, situazione non accettabile. Per cui Λ dovrà assumere valori compresi tra -12 e 12 .

In questo modo siamo in grado di valutare δ_1 , δ_2 e τ_0 . Dalla definizione di spessore di spostamento, equazione (1.1), usando la (1.96), si ha:

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \int_{\eta=0}^1 [1 - F(\eta) - \Lambda G(\eta)] d\eta = \frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120}. \quad (1.97)$$

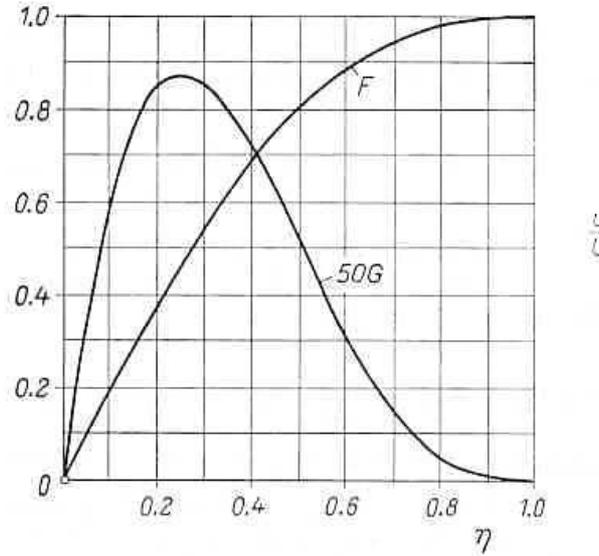


Figura 1.10: Andamento delle funzioni $F(\eta)$ e $G(\eta)$ per il calcolo della distribuzione di velocità nello strato limite (Schlichting, 1968).

Allo stesso modo, usando le equazioni (1.45) e (1.96), si ha:

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \int_{\eta=0}^1 [F(\eta) + \Lambda G(\eta)] [1 - F(\eta) - \Lambda G(\eta)] d\eta = \frac{1}{63} \left(\frac{37}{5} - \frac{\Lambda}{15} - \frac{\Lambda^2}{144} \right). \quad (1.98)$$

Infine, lo sforzo a parete vale:

$$\frac{\tau_0 \delta}{\mu U} = 2 + \frac{\Lambda}{6}. \quad (1.99)$$

A questo punto della procedura resta da determinare solo δ . A tale scopo, è necessario rielaborare l'equazione integrale (1.84) moltiplicando ambo i membri per $\delta_2/\nu U$ in modo da ottenere la seguente rappresentazione adimensionale:

$$\frac{U \delta_2 \delta_2'}{\nu} + \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \frac{U' \delta_2^2}{\nu} = \frac{\tau_0 \delta_2}{\mu U}. \quad (1.100)$$

Questa equazione dovrà essere risolta per δ_2 e si valuterà δ dalla equazione (1.98). Seguendo la soluzione proposta da Holstein e Bohlen, si introduce il parametro adimensionale

$$K = \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{dU}{dx} \quad (1.101)$$

la cui definizione è simile a quella di Λ , con δ sostituito da δ_2 . Ponendo

$$Z = \frac{\delta_2^2}{\nu} \quad (1.102)$$

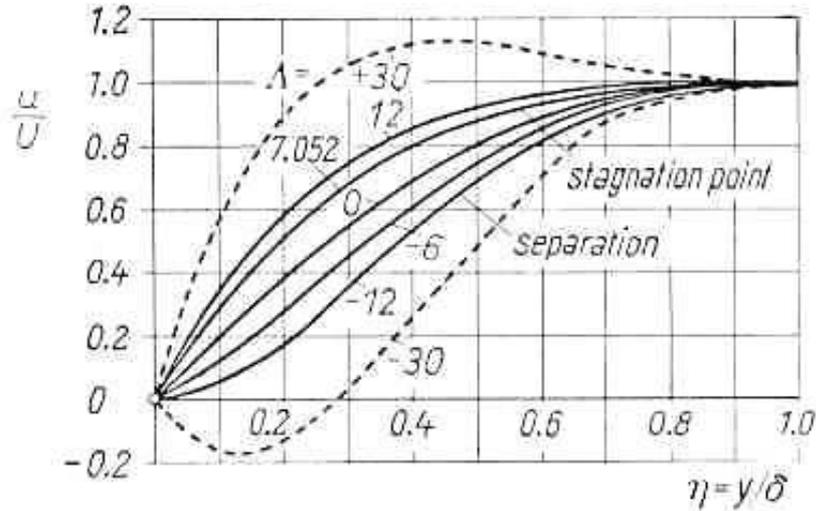


Figura 1.11: Andamento del profilo di velocità nello strato limite al variare di Λ (Schlichting, 1968).

si ha

$$K = Z \frac{dU}{dx}. \quad (1.103)$$

Si può verificare che la relazione tra K e Λ è la seguente

$$K = \left(\frac{37}{315} - \frac{1}{945}\Lambda - \frac{1}{9072}\Lambda^2 \right)^2 \Lambda. \quad (1.104)$$

Definendo il fattore di forma H_{12} ⁵,

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = f_1(K), \quad (1.105)$$

e la quantità adimensionale

$$\frac{\tau_0 \delta_2}{\mu U} = f_2(K), \quad (1.106)$$

l'equazione (1.100) diventa

$$\frac{1}{2} U \frac{dZ}{dx} + [2 + f_1(K)] K = f_2(K). \quad (1.107)$$

⁵Il fattore di forma H_{12} assume valori compresi tra 2.25 (per $\Lambda = 12$) e 3.5 (per $\Lambda = -12$) nel caso di flusso laminare, mentre per per flussi turbolenti si hanno valori compresi tra 1.3 e 2.2. Nel punto di transizione si ha un decremento sensibile di H_{12} .

Adottando la posizione

$$F(K) = 2 f_2(K) - 4 K - 2 K f_1(K), \quad (1.108)$$

l'equazione (1.107) si scrive

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{F(K)}{U}; \quad K = Z U'. \quad (1.109)$$

Questa è un'equazione differenziale ordinaria non lineare del prim'ordine di Z in funzione di x . La forma complessa di F in funzione di Λ non costituisce una difficoltà nella soluzione dell'equazione (1.109) in quanto essa ha validità universale (non dipende dalla geometria in esame). La soluzione dell'equazione (1.109) partirà dal punto di ristagno, $x = 0$, dove $U = 0$ e dU/dx assume un valore finito (in genere diverso da zero). Al bordo d'attacco $F(K) = 0$, da cui si ricava che $\Lambda_0 = 7.052$ e $K_0 = 0.077$; la singolarità di dZ/dx nell'equazione (1.109) è risolta attraverso un processo al limite che porta a valutare

$$Z_0 = \frac{K_0}{U'_0} = \frac{0.077}{U'_0}; \quad \left(\frac{dZ}{dx} \right)_0 = -0.0652 \frac{U''_0}{U'^2_0}. \quad (1.110)$$

Questi valori iniziali consentono di procedere all'integrazione dell'equazione differenziale, noti $U(x)$ e dU/dx dalla soluzione del flusso potenziale. La procedura di soluzione può quindi essere così sintetizzata:

1. sono note $U(x)$ e dU/dx lungo la parete;
2. integrando l'equazione (1.109) si ottiene $Z(x)$ e il parametro adimensionale $K(x)$; si può quindi valutare $\delta_2(x)$ usando l'equazione (1.101), e si può determinare l'eventuale punto di separazione (caratterizzato da $\Lambda = -12$ e $K = -0.1567$);
3. l'andamento di $\Lambda(x)$ si ricava dall'equazione (1.104);
4. si valutano lo spessore di spostamento $\delta_1(x)$ e lo sforzo a parete, $\tau_0(x)$, mediante le equazioni (1.105) e (1.106);
5. lo spessore di strato limite si valuta da una delle equazioni (1.97) o (1.98);
6. infine, il profilo di velocità è calcolato dall'equazione (1.96).

Per avere una misura dell'errore commesso nella soluzione dello strato limite mediante l'approccio appena descritto si può considerare il caso della lamina piana ad incidenza nulla, per cui si ha la soluzione di Blasius. In questo caso è facile verificare che il profilo di velocità, equazione (1.96), si scrive:

$$\frac{u}{U} = F(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4,$$

essendo $\Lambda = 0$. Inoltre, poiché $U(x) = U = \text{cost.}$, $U' = 0$, da cui $K = \Lambda \equiv 0$ e l'equazione (1.109) diventa

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{F(0)}{U} = \frac{0.4698}{U}.$$

Considerato che $Z(0) = 0$, si ha:

$$Z = 0.4698 \frac{x}{U} \quad \Longrightarrow \quad \delta_2 = 0.686 \sqrt{\frac{\nu x}{U}},$$

da confrontare con il coefficiente 0.664 della soluzione esatta. Tali valori corrispondono anche ai coefficienti della quantità

$$\frac{1}{2} c_f \left(\frac{U x}{\nu} \right)^{1/2}.$$

Quindi,

$$\delta_1 = 1.752 \sqrt{\frac{\nu x}{U}},$$

contro il valore esatto pari a 1.7208. Infine, il fattore di forma H_{12} vale 2.554 contro il valore esatto 2.592.

È già stato osservato come nei flussi con gradiente di pressione avverso, comuni nelle applicazioni pratiche, si può sviluppare una separazione, situazione non desiderata a causa delle perdite di energia ad essa associate. Vedremo come i flussi laminari sono in grado di evitare la separazione solo per piccoli valori del gradiente di pressione avverso, mentre per i valori comunemente incontrati essi porterebbero quasi sempre ad una separazione. In realtà ciò non accade in quanto la maggior parte dei flussi, essendo turbolenti, riescono a sopportare valori elevati del gradiente di pressione avverso senza subire separazione. Verrà ora ottenuta una stima del massimo modulo del gradiente di pressione in uno strato limite laminare consentito da un flusso senza separazione. Il procedimento, dovuto a Prandtl, usa la soluzione approssimata dell'equazione integrale precedentemente descritta. Si suppone che lo strato limite si sviluppa seguendo la distribuzione di pressione del flusso potenziale sino al punto di separazione. Da questo punto in poi si suppone che il gradiente di pressione sia tale da non modificare il profilo di velocità a valle, ovvero che il parametro Λ resti invariato; poiché alla separazione $\Lambda = -12$, si usa $\Lambda = -10$, cui corrispondono i valori $K = -0.1369$ e $F(K) = 1.523$. Con questi dati, dalle equazioni (1.102) e (1.103) si vede come per evitare la separazione deve valere la seguente relazione

$$\frac{\delta_2^2}{\nu} = Z = \frac{0.1369}{-U'(x)}.$$

Ne consegue che

$$\frac{dZ}{dx} = 0.1369 \frac{U''}{U'^2},$$

da cui

$$U \frac{dZ}{dx} = 0.1369 \frac{U U''}{U'^2} = 0.1369 \sigma; \quad \text{con} \quad \sigma = \frac{U U''}{U'^2}. \quad (1.111)$$

I profili di velocità a valle della separazione sono forniti usando l'equazione (1.109):

$$U \frac{dZ}{dx} = F(K) = 1.523, \quad (1.112)$$

dove si è usato il valore di $F(K)$ corrispondente a $\Lambda = -10$. Pertanto, dalle due precedenti equazioni risulta che Λ rimane costante se $0.1369 \sigma = 1.523$, ovvero

$$\sigma = \frac{U U''}{U'^2} = 11.125 \approx 11, \quad (1.113)$$

che costituisce la condizione limite per la separazione. Quindi per $\sigma > 11$ non si avrà separazione, mentre per $\sigma < 11$ si avrà separazione. Alla luce dei risultati ottenuti si può considerare che, in presenza di un gradiente di pressione avverso ($U' < 0$) la condizione necessaria per non avere separazione è che $U'' > 0$, ovvero che il modulo del gradiente di pressione deve diminuire nella direzione del flusso; mentre, la separazione si presenterà in caso contrario ($U'' < 0$) e nel caso limite $U'' = 0$ di gradiente costante lungo la direzione del flusso. Quindi la condizione sufficiente per evitare la separazione è:

$$U'' > 11 \frac{U'^2}{U}.$$

Per avere una stima delle caratteristiche del flusso potenziale e del corrispondente strato limite in condizioni di incipiente separazione, si considera il caso limite,

$$\frac{U''}{U'} = 11 \frac{U'}{U},$$

da cui, integrando:

$$\ln U' = 11 \ln U + \ln(-C_1') \iff -C_1' = \frac{U'}{U^{11}}. \quad (1.114)$$

Ripetendo l'integrazione, si ha:

$$\frac{1}{10} U^{-10} = C_1' x + C_2, \quad (1.115)$$

dove, poiché per $x = 0$, $U(x) = U_0$,

$$C_2 = \frac{1}{10} U_0^{-10}.$$

Posto $C_1 = C_1' U_0^{10}$, la distribuzione di velocità potenziale per cui si può evitare la separazione si scrive

$$U(x) = \frac{U_0}{(1 + 10 C_1 x)^{1/10}}. \quad (1.116)$$

La costante C_1 si può determinare noto il valore dello spessore dello strato limite a $x = 0$, δ_0 . Ricordando che nel punto di separazione $\Lambda = -10$, si ha

$$\Lambda = \frac{U' \delta^2}{\nu} = -10 \quad \implies \quad \delta = \sqrt{\frac{10 \nu}{-U'}}.$$

Dall'equazione (1.116) si ha:

$$U' = -\frac{C_1 U_0}{(1 + 10 C_1 x)^{11/10}},$$

per cui

$$\delta = \sqrt{\frac{10 \nu}{C_1 U_0}} (1 + 10 C_1 x)^{11/20}.$$

Dalla condizione che $\delta = \delta_0$ per $x = 0$, si ha

$$C_1 = \frac{10 \nu}{U_0 \delta_0^2},$$

da cui

$$U(x) = U_0 \left(1 + 100 \frac{\nu x}{U_0 \delta_0^2} \right)^{-0.1}, \quad (1.117)$$

$$\delta(x) = \delta_0 \left(1 + 100 \frac{\nu x}{U_0 \delta_0^2} \right)^{0.55}. \quad (1.118)$$

Si vede come la massima decelerazione ammissibile sia proporzionale a $x^{-0.1}$.

1.3 Transizione

Nelle situazioni reali il comportamento del fluido differisce molto da quello precedentemente descritto per il caso laminare in quanto il flusso è turbolento. L'origine della turbolenza e la conseguente transizione da flusso laminare a flusso turbolento è uno dei problemi fondamentali della meccanica dei fluidi. I primi studi sistematici, condotti da Reynolds per i flussi in condotti e in canali, rilevarono che la transizione da flusso laminare a turbolento avviene in prossimità dello stesso parametro adimensionale (numero di Reynolds) $\bar{w} d/\nu$, dove \bar{w} indica la velocità media (rapporto tra la portata volumetrica e la sezione). Nel caso di flusso in un condotto, il valore critico a cui si osserva la transizione è circa pari a 2300: per valori di Re inferiori al valore critico il flusso è laminare, mentre per valori superiori il flusso è turbolento. Il valore critico dipende dalla natura del flusso all'ingresso del condotto e della parete del condotto. La transizione laminare-turbolento è caratterizzata da un notevole incremento della resistenza al moto, come illustrato in figura 1.12.

Un'analisi dettagliata del processo di transizione rivela che in un intervallo del numero di Reynolds prossimo al valore critico il flusso diventa "intermittente": si susseguono nel tempo periodi in cui il flusso è laminare e quindi turbolento, e la successione dei

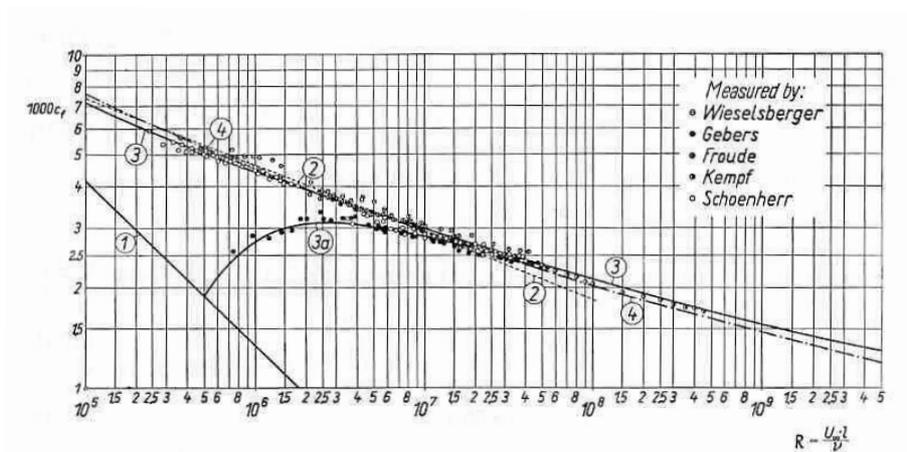


Figura 1.12: Coefficiente d'attrito per lamina piana (liscia) ad incidenza nulla; confronto tra teoria ed dati sperimentali (Schlichting, 1968).

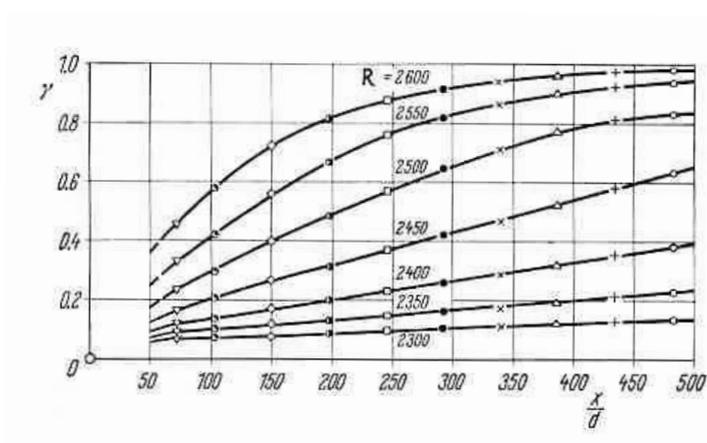


Figura 1.13: Fattore di intermittenza in funzione dell'ascissa del condotto e per vari numeri di Reynolds per il flusso in un condotto in regime transizionale (Rotta, 1956).

periodi risulta random. Inoltre, con riferimento al flusso in un canale in cui si mantiene costante la portata, nella mezzeria la velocità laminare risulta maggiore di quella media del flusso turbolento, mentre succede il contrario in punti prossimi alle pareti. Questi flussi possono essere caratterizzati con l'aiuto di un *fattore di intermittenza*, γ , definito come la frazione di tempo durante la quale il flusso è turbolento in un dato punto. Pertanto $\gamma = 1$ corrisponde a flusso completamente turbolento, mentre $\gamma = 0$ indica flusso laminare. L'andamento di γ al variare di x in un condotto in regime di flusso transizionale è riportato in figura 1.13.

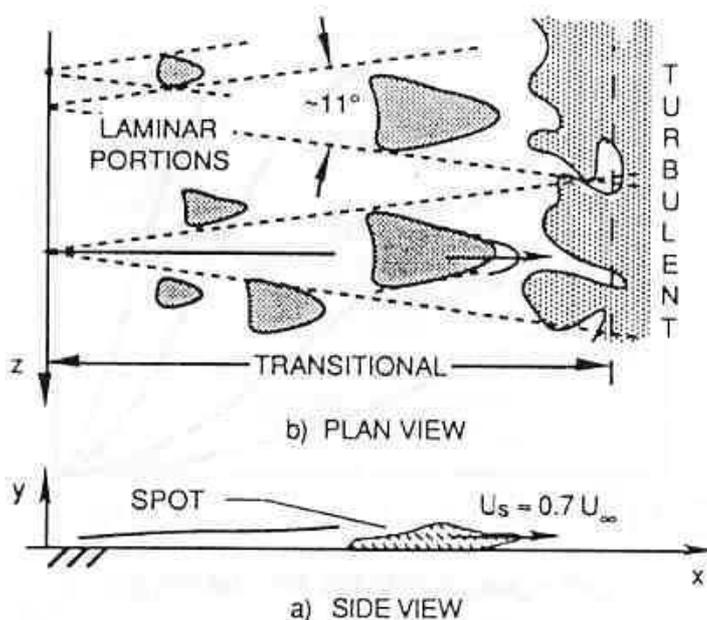


Figura 1.14: Crescita di uno “spot” turbolento nello strato limite laminare su una lamina piana ad incidenza nulla (Mayle, 1991).

In generale ci sono tre modalità fondamentali di transizione. La prima si dice *naturale* e viene causata da un’instabilità debole (onde di Tollmien–Schlichting) nello strato limite laminare (i piccoli disturbi non vengono smorzati da meccanismi di dissipazione) e procede attraverso vari stadi in cui l’instabilità viene amplificata sino al raggiungimento della condizione turbolenta. Nel secondo modo, noto col nome di *transizione di “bypass”*, la transizione è causata dai disturbi presenti nel flusso esterno (quali gli alti livelli di intensità di turbolenza) escludendo la precedente modalità. La terza modalità è infine legata alla presenza di zone di separazione laminare e può coinvolgere instabilità di Tollmien–Schlichting. Le ultime due modalità sono tipiche dei flussi nella turbomacchine.

La transizione è un fenomeno stocastico, non stazionario e tridimensionale che si estende nella regione di moto in cui coesistono flusso laminare e turbolento. Infatti, la transizione avviene attraverso la produzione random (nello spazio e nel tempo) di “spot” turbolenti nello strato limite laminare che crescono propagandosi a valle fino a quando il flusso diventa completamente turbolento, figura 1.14. Usando la definizione di fattore di intermittenza è possibile valutare le proprietà del flusso nella zona di transizione come media pesata delle proprietà relative a flusso laminare e turbolento. Per esempio, il coefficiente di attrito si può esprimere nel modo seguente:

$$c_f = (1 - \gamma) c_{f,L} + \gamma c_{f,T}. \quad (1.119)$$

Per poter meglio approssimare l’andamento sperimentale, nell’equazione precedente si

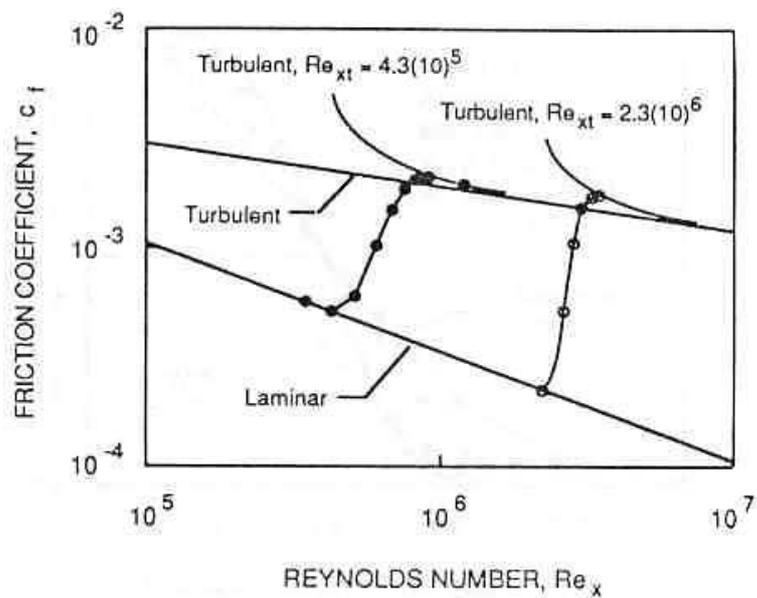


Figura 1.15: Distribuzione del coefficiente di attrito su una lamina piana attraverso la transizione (Dhawan e Narasimha, 1958).

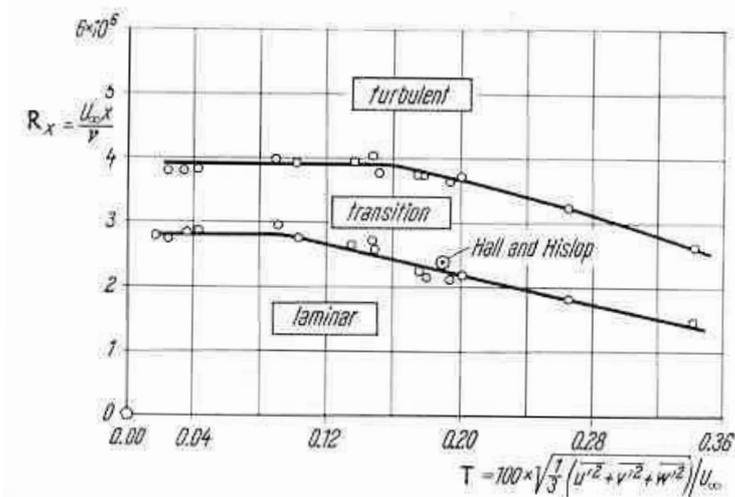


Figura 1.16: Influenza dell'intensità turbolenta sul numero di Reynolds critico nel caso di flusso su lamina piana ad incidenza nulla (Schubauer e Skramstad, 1947).

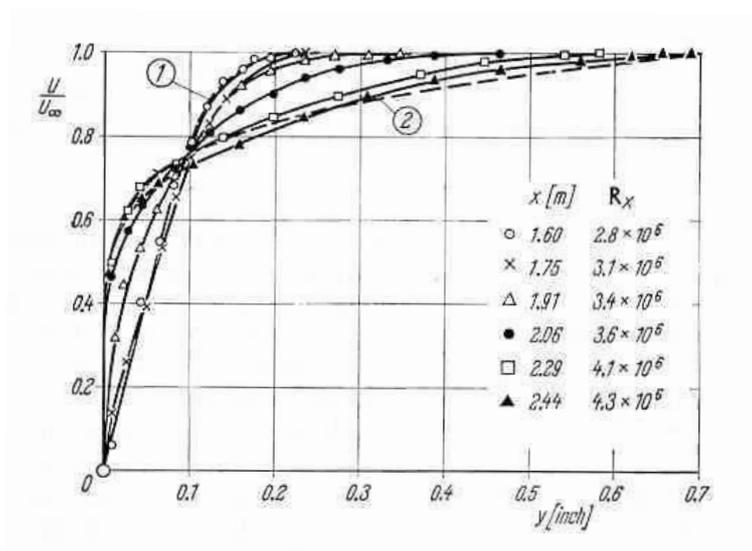


Figura 1.17: Profili di velocità nello strato limite su una lamina piana ad incidenza nulla (Schubauer e Klebanoff, 1955).

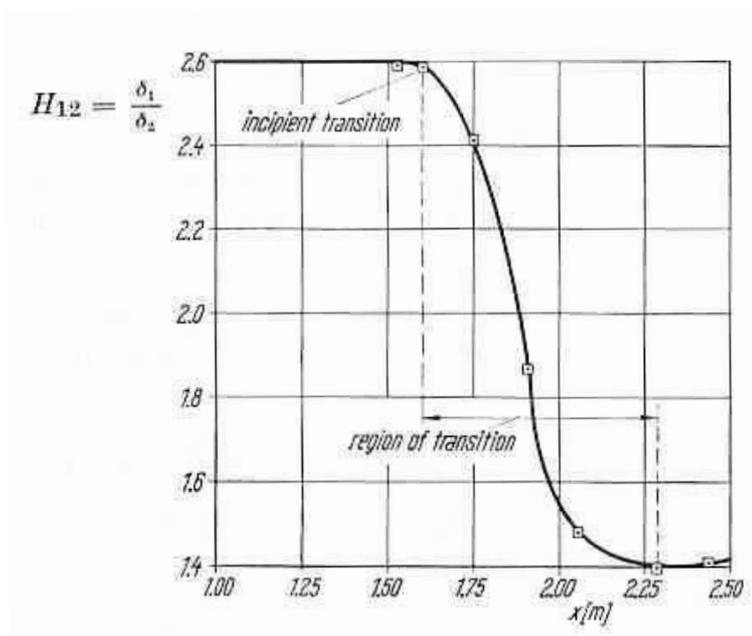


Figura 1.18: Variazione del fattore di forma H_{12} per il flusso su lamina piana nella regione di transizione (Schubauer e Klebanoff, 1955).

dovrà supporre nella valutazione di $c_{f,T}$ che lo strato limite turbolento si sviluppi a partire dall'inizio della transizione, x_t . Il risultato è mostrato in figura 1.15.

La transizione da flusso laminare a turbolento interessa il flusso all'interno dello strato limite ed è influenzata da diversi parametri quali la distribuzione di pressione del flusso esterno, la rugosità delle pareti e l'entità del disturbo nel flusso esterno (intensità di turbolenza). Ancora una volta consideriamo il caso della lamina piana ad incidenza nulla. Lo spessore dello strato limite aumenta proporzionalmente alla radice quadrata della distanza x dal bordo d'attacco, dove, in assenza di separazione, lo strato limite è laminare per diventare turbolento più a valle. Per flusso con intensità turbolenta all'incirca pari a 0.5% la transizione avviene alla distanza definita dal numero di Reynolds

$$Re_{x,cr} = \left(\frac{U_\infty x}{\nu} \right)_{cr} = 3.5 \cdot 10^5 \div 10^6.$$

Come già evidenziato, uno dei parametri che influenzano la transizione è l'intensità turbolenta, $T = 100 \sqrt{1/3 (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})} / U_\infty$, del flusso indisturbato: all'aumentare di T la transizione viene anticipata, vedi figura 1.16. La transizione può anche essere individuata dall'analisi della variazione del profilo di velocità nello strato limite. Dalla figura 1.17 si nota come la transizione sia caratterizzata da un brusco incremento dello spessore dello strato limite e da una diversa forma del profilo di velocità; infatti, il fattore di forma, mostrato in figura 1.18, passa dal valore 2.6 (laminare) al valore 1.4 (turbolento) attraverso una zona di transizione. Tali caratteristiche possono essere utilizzate per quantificare il punto di inizio transizione e la lunghezza della zona di transizione.

1.4 Flusso turbolento

La maggior parte dei flussi di interesse pratico sono turbolenti, indicando con questo termine i flussi che presentano fluttuazioni irregolari sovrapposte ai valori medi delle grandezze. Il miscelamento conseguente alla presenza di tali fluttuazioni è molto importante in quanto i suoi effetti sono simili a quelli prodotti da una viscosità che può essere di ordini di grandezza superiore a quella dinamica. Per valori elevati di Re si ha un continuo trasporto di energia dal flusso principale a strutture vorticosi di grande taglia sino a quelle più piccole, dove l'energia viene dissipata e tale processo avviene all'interno dello strato limite di parete.

A causa della complessità dei flussi turbolenti, si affronterà lo studio dello strato limite in tali condizioni facendo riferimento alle grandezze del *flusso medio*; tale approccio, unitamente all'uso di opportune ipotesi, consente di ottenere risultati in buon accordo con i dati sperimentali.

Dall'analisi dei flussi turbolenti si evince che le grandezze di flusso, quali velocità e pressione, in un punto dello spazio non sono costanti nel tempo, ma presentano fluttuazioni irregolari ad elevata frequenza. Pertanto è conveniente dal punto di vista matematico separare le grandezze di flusso in una componente media ed una fluttuante, dove la media è intesa qui come media nel tempo:

$$u = \bar{u} + u'; \quad v = \bar{v} + v'; \quad w = \bar{w} + w'; \quad p = \bar{p} + p'. \quad (1.120)$$

Nel caso di flussi comprimibili sarà necessario introdurre le corrispondenti relazioni per densità e temperatura

$$\varrho = \bar{\varrho} + \varrho'; \quad T = \bar{T} + T'. \quad (1.121)$$

I valori medi sono valutati come

$$\bar{u} = \frac{1}{t_1} \int_{t_0}^{t_0+t_1} u dt, \quad (1.122)$$

in cui t_1 indica un intervallo di tempo sufficientemente grande da rendere la media indipendente dal suo valore. Quindi, per definizione, le medie temporali delle fluttuazioni sono nulle:

$$\bar{u}' = 0, \quad \bar{v}' = 0, \quad \bar{w}' = 0, \quad \bar{p}' = 0, \quad \bar{\varrho}' = 0, \quad \bar{T}' = 0. \quad (1.123)$$

La caratteristica notevole dei flussi turbolenti è che tali fluttuazioni influenzano in modo non trascurabile le grandezze medie e queste presentano un incremento notevole nella resistenza alla deformazione. In pratica, la presenza delle fluttuazioni si manifesta in un aumento apparente della viscosità del flusso. Se f e g sono due variabili dipendenti e s indica una variabile indipendente, valgono le seguenti regole:

$$\overline{\bar{f}} = \bar{f}; \quad \overline{\bar{f} + \bar{g}} = \bar{f} + \bar{g}; \quad \overline{\bar{f} \bar{g}} = \bar{f} \bar{g}; \quad \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}; \quad \overline{\int f ds} = \int \bar{f} ds. \quad (1.124)$$

Per meglio comprendere la natura degli sforzi apparenti nei flussi turbolenti, si consideri un elemento di area dA appartenente al piano $y - z$ (con normale parallela a x), le cui componenti di velocità siano u , v e w . La massa di fluido che attraversa tale superficie nel tempo dt vale $\varrho u dA dt$ e i flussi di quantità di moto nelle direzioni x, y, z valgono

$$dM_x = \varrho u^2 dA; \quad dM_y = \varrho u v dA; \quad dM_z = \varrho u w dA.$$

Considerando che la densità è costante, le medie dei flussi di quantità di moto valgono:

$$\overline{dM_x} = \varrho (\bar{u}^2 + \overline{u'^2}) dA; \quad \overline{dM_y} = \varrho (\bar{u} \bar{v} + \overline{u' v'}) dA; \quad \overline{dM_z} = \varrho (\bar{u} \bar{w} + \overline{u' w'}) dA.$$

Da queste relazioni si deduce che sull'area in esame, perpendicolare all'asse x , agiscono le tensioni $-\varrho (\bar{u}^2 + \overline{u'^2})$ lungo x , $-\varrho (\bar{u} \bar{v} + \overline{u' v'})$ lungo y e $-\varrho (\bar{u} \bar{w} + \overline{u' w'})$ lungo z . Pertanto, la sovrapposizione delle fluttuazioni al flusso medio comporta la presenza di sforzi addizionali,

$$\tau'_{xx} = -\varrho \overline{u'^2}; \quad \tau'_{yx} = -\varrho \overline{u' v'}; \quad \tau'_{zx} = -\varrho \overline{u' w'}. \quad (1.125)$$

Tali sforzi apparenti vengono detti *sforzi di Reynolds* del flusso turbolento. Analizzando il caso di superfici perpendicolari agli assi y e z si ottengono espressioni analoghe che definiscono il tensore degli sforzi di Reynolds. Tali sforzi compaiono nelle equazioni di Navier-Stokes una volta che ad esse viene applicata la procedura di media temporale

(nota come procedura di media di Reynolds). Infatti, le equazioni di Navier–Stokes per flussi incompruibili si scrivono:

$$\varrho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u; \quad (1.126)$$

$$\varrho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v; \quad (1.127)$$

$$\varrho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w; \quad (1.128)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.129)$$

Usando la decomposizione in quantità medie e fluttuazioni, equazione (1.120), e operando la media sull'equazione di continuità si ha:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0; \quad (1.130)$$

da cui

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.$$

Inoltre, operando la medie sulle componenti dell'equazione della quantità di moto e usando il risultato dell'equazione della massa, si ha:

$$\varrho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \varrho \left[\frac{\partial(\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'w'})}{\partial z} \right]; \quad (1.131)$$

$$\varrho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} - \varrho \left[\frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v'^2})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{v'w'})}{\partial z} \right]; \quad (1.132)$$

$$\varrho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{w} - \varrho \left[\frac{\partial(\overline{u'w'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v'w'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{w'^2})}{\partial z} \right]. \quad (1.133)$$

In queste equazioni il termine in parentesi quadre a secondo membro rappresenta lo sforzo addizionale prodotto dalle fluttuazioni turbolente sul flusso medio. Il tensore degli sforzi di Reynolds, la cui forma è la seguente,

$$\begin{pmatrix} \tau'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \tau'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \tau'_{zz} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \varrho \overline{u'^2} & \varrho \overline{u'v'} & \varrho \overline{u'w'} \\ \varrho \overline{u'v'} & \varrho \overline{v'^2} & \varrho \overline{v'w'} \\ \varrho \overline{u'w'} & \varrho \overline{v'w'} & \varrho \overline{w'^2} \end{pmatrix}, \quad (1.134)$$

introduce sei nuove incognite nel problema che bisognerà valutare attraverso la formulazione di opportuni modelli.

Nei modelli più semplici ed usati nelle applicazioni pratiche si adotta l'ipotesi di Boussinesq che, in analogia con la legge valida nel caso di flussi laminari,

$$\tau_t = \mu \frac{\partial u}{\partial y},$$

ha ipotizzato un analogo comportamento degli sfrozi turbolenti:

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \mu_\tau \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (1.135)$$

dove μ_τ indica un coefficiente di viscosità turbolenta apparente. Ovviamente tale parametro dipende a sua volta dalle grandezze di flusso. In questo modo è stata introdotta una semplificazione notevole nella risoluzione del problema in quanto è stato ridotto il numero di grandezze addizionali da sei ad una, a spese di una approssimazione. Infatti, le equazioni mediate nel tempo possono essere riscritte in maniera identica a quelle relative alle grandezze istantanee una volta sostituita alla viscosità dinamica la sua somma con la viscosità turbolenta. Pertanto, le equazioni (1.15) e (1.16), valide nel caso di flusso incomprimibile, bidimensionale, nel caso di flusso turbolento e usando l'ipotesi di Boussinesq diventano:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_\tau) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right], \quad (1.136)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (1.137)$$

dove $\nu_\tau = \mu_\tau / \rho$.

L'ipotesi di Boussinesq non consente di risolvere il problema in quanto bisogna definire una relazione che modelli la dipendenza di μ_τ dal flusso medio. In tal senso il metodo più semplice è quello della *lunghezza di miscelamento di Prandtl*, che verrà di seguito illustrato in riferimento al caso di flusso incomprimibile bidimensionale parallelo, in cui le linee di corrente sono rette parallele tra di loro, figura 1.19. Indicando con x la direzione principale del flusso, si ha:

$$\bar{u} = \bar{u}(y); \quad \bar{v} = 0;$$

in questo caso l'unico sforzo non nullo è

$$\tau'_{xy} = \tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \mu_\tau \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (1.138)$$

Nel modello di Prandtl si ipotizza che in una data posizione y_1 arrivino (ad intervalli random) masse fluide da posizioni a distanza $\pm l$. La massa fluida proveniente dalla posizione $(y_1 - l)$ conservando la propria quantità di moto, produrrà una variazione di velocità in y_1 pari a

$$\Delta u_1 = \bar{u}(y_1) - \bar{u}(y_1 - l) \approx \bar{u}(y_1) - \left[\bar{u}(y_1) - l \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1 \right] = l \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1,$$

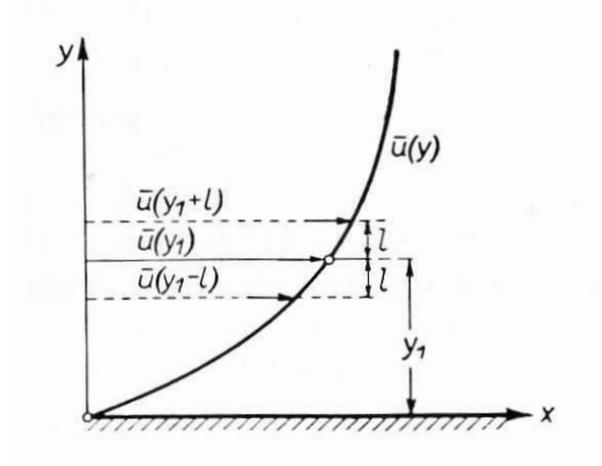


Figura 1.19: Lunghezza di miscelamento.

con $v' > 0$. Analogamente, la massa fluida che arriva in y_1 da $(y_1 + l)$ possiede una velocità maggiore rispetto a quella del fluido circostante, e provoca una differenza di velocità

$$\Delta u_2 = \bar{u}(y_1 + l) - \bar{u}(y_1) \approx l \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1,$$

con $v' < 0$. Le differenze di velocità causate dal moto trasversale possono essere considerate come le fluttuazioni turbolente in y_1 , per cui:

$$\overline{|u'|} = \frac{1}{2} (|\Delta u_1| + |\Delta u_2|) = l \left| \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1 \right|, \quad (1.139)$$

dove l indica la lunghezza di miscelamento.

Il concetto di lunghezza di miscelamento di Prandtl è simile a quello di cammino libero medio della teoria cinetica dei gas con la differenza che, mentre quest'ultima teoria si riferisce all'analisi microscopica del moto di molecole, la teoria di Prandtl tratta del moto macroscopico di agglomerati di particelle fluide.

La lunghezza di miscelamento può essere interpretata come la distanza in direzione trasversale al flusso che deve essere percorsa da una massa fluida che si muove con la sua velocità originale in modo che la differenza di velocità tra tale valore e quello nella nuova posizione sia uguale alla fluttuazione media del flusso turbolento.

Per ragioni di continuità la fluttuazione in direzione verticale sarà dello stesso ordine di grandezza di quella orizzontale; quindi:

$$\overline{|v'|} = \text{cost} \overline{|u'|} = \text{cost} l \left| \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1 \right|. \quad (1.140)$$

Dall'analisi precedente si può dedurre che la massa fluida che arriva in y_1 dal basso (alto) produrrà in generale una fluttuazione $u' < 0 (> 0)$, con $v' > 0 (< 0)$, quindi $u'v' < 0$.

Pertanto

$$\overline{u'v'} = -c \overline{|u'|} \overline{|v'|}; \quad \text{con } 0 < c < 1 \quad (c \neq 0). \quad (1.141)$$

Combinando le relazioni così ottenute si ha:

$$\overline{u'v'} = -\text{cost } l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2. \quad (1.142)$$

Il valore della costante può essere inglobato in quello della lunghezza di miscelamento per scrivere lo sforzo di taglio turbolento come segue:

$$\tau_t = -\varrho \overline{u'v'} = \varrho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2. \quad (1.143)$$

Poiché il segno di τ_t deve cambiare con quello di $d\bar{u}/dy$ l'espressione più appropriata risulta

$$\tau_t = \varrho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (1.144)$$

dove, usando l'ipotesi di Boussinesq,

$$\mu_\tau = \varrho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (1.145)$$

La viscosità turbolenza è così legata alla lunghezza di miscelamento, ancora una grandezza locale del flusso, per cui esistono alcune semplici relazioni che ne consentono la valutazione in funzione della lunghezza caratteristica del flusso in esame.

1.4.1 Legge universale di parete

Le equazioni (1.144) e (1.145), che esprimono l'ipotesi della lunghezza di miscelamento di Prandtl, consentono di ottenere risultati in buon accordo con i dati sperimentali in alcuni casi di notevole importanza, quale il flusso turbolento lungo pareti solide e in getti liberi. In particolare, tratteremo il caso del flusso su una parete piana liscia, indicando con y la distanza da parete e $u(y)$ la velocità, e definiremo la *legge universale* per il profilo di velocità a parete, applicabile anche a casi diversi. In prossimità della parete si assume che la lunghezza di miscelamento sia proporzionale alla distanza dalla parete:

$$l = \kappa y, \quad (1.146)$$

dove κ indica una costante adimensionale. Tale ipotesi è ragionevole in quanto lo sforzo turbolento a parete è nullo essendo nulle le fluttuazioni. Quindi, usando l'ipotesi di Prandtl, si ha:

$$\tau = \varrho \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (1.147)$$

L'ipotesi aggiuntiva fatta da Prandtl in questo caso assume che lo sforzo apparente sia costante, $\tau = \tau_0$. Introducendo la *velocità di taglio o d'attrito a parete*,

$$v_{\star 0} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}, \quad (1.148)$$

si ha:

$$v_{\star 0}^2 = \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2, \quad (1.149)$$

ovvero

$$\frac{du}{dy} = \frac{v_{\star 0}}{\kappa y}. \quad (1.150)$$

Integrando questa equazione si ha:

$$u = \frac{v_{\star 0}}{\kappa} \ln y + C, \quad (1.151)$$

dove la costante di integrazione è determinata dalla condizione a parete e deve consentire la continuità tra il profilo di velocità turbolento e quello all'interno del sottostrato laminare. Ipotizzando che l'equazione (1.151) valga sino a $y = h$, dove $u = u_{max}$, si ha la seguente legge:

$$u_{max} = \frac{v_{\star 0}}{\kappa} \ln h + C, \quad (1.152)$$

da cui

$$\frac{u_{max} - u}{v_{\star 0}} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{h}{y}, \quad (1.153)$$

nota come legge della differenza o difetto di velocità.

La costante di integrazione nell'equazione (1.151) si determina imponendo che la velocità sia nulla ad una certa distanza y_0 (circa pari all'altezza del sottostrato laminare):

$$u = \frac{v_{\star 0}}{\kappa} (\ln y - \ln y_0). \quad (1.154)$$

Con argomenti di tipo dimensionale si può concludere che tale distanza sia proporzionale al rapporto $\nu/v_{\star 0}$, per cui si pone

$$y_0 = \beta \frac{\nu}{v_{\star 0}}, \quad (1.155)$$

con β costante adimensionale. L'equazione (1.154) può quindi essere riscritta come segue:

$$\frac{u}{v_{\star 0}} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{y v_{\star 0}}{\nu} - \ln \beta \right). \quad (1.156)$$

Questa è la legge (adimensionale) universale logaritmica della distribuzione di velocità che asserisce che la velocità di taglio $v_{\star 0}$ è funzione della distanza adimensionale da parete, $y v_{\star 0}/\nu$. Tale equazione contiene due costanti, κ e β . La prima è una costante universale del flusso turbolento indipendente dalla natura della parete (liscia o rugosa), il cui valore,

determinato da dati sperimentali è $\kappa = 0.4$. La seconda costante, β , dipende invece dalla natura della superficie.

La legge universale appena ricavata, equazione (1.156), è stata ottenuta per flusso turbolento e tiene in conto, a parte il sottostrato laminare a parete, solo gli sforzi turbolenti; essa è valida, quindi, solo per numeri di Reynolds elevati. Nel caso di numeri di Reynolds più piccoli, quando gli sforzi laminari forniscono un contributo non trascurabile anche fuori dal sottostrato, i dati sperimentali suggeriscono che una legge più appropriata sia quella di potenza,

$$\frac{u}{v_{*0}} = C \left(\frac{yv_{*0}}{\nu} \right)^n, \quad (1.157)$$

dove n è circa uguale a $1/7$ per numero di Reynolds fino a 10^5 .

1.4.2 Flusso turbolento in condotti

Dal confronto con i dati sperimentali nel caso di flusso in condotti a sezione circolare i valori di C ed n nell'equazione (1.157) variano con il numero di Reynolds secondo la tabella 2. Dall'equazione (1.157) per $n = 7$ si può ottenere la seguente relazione per la

| Re | $\approx 10^5$ | $\approx 5 \cdot 10^5$ | $\approx 10^6$ | $\approx 2 \cdot 10^6$ |
|------|----------------|------------------------|----------------|------------------------|
| n | 7 | 8 | 9 | 10 |
| C | 8.74 | 9.71 | 10.6 | 11.5 |

Tabella 2: Coefficienti della legge di potenza, equazione (1.157).

velocità $v_* = v_{*0}$:

$$v_* = 0.15 u^{7/8} \left(\frac{\nu}{y} \right)^{1/8} \quad (1.158)$$

da cui:

$$\tau_0 = \rho v_*^2 = 0.0225 \rho u^{7/4} \left(\frac{\nu}{y} \right)^{1/4}, \quad (1.159)$$

ovvero, indicando con R il raggio del condotto,

$$\tau_0 = 0.0225 \rho U^{7/4} \left(\frac{\nu}{R} \right)^{1/4}. \quad (1.160)$$

Poiché l'esponente che compare nell'espressione dello sforzo di taglio e nella legge della velocità diminuisce all'aumentare di Re , si ottengono relazioni che tenderanno asintoticamente a espressioni che potranno essere considerate valide per elevati numeri di Reynolds e che devono contenere il logaritmo della variabile indipendente⁶. In effetti, i dati sperimentali confermano la validità della legge logaritmica per valori del numero di Reynolds molto alti, indicando che a tali regimi il contributo allo sforzo d'attrito del termine molecolare

⁶in quanto limite di un polinomio per valori bassi dell'esponente.

(laminare) diventa trascurabile rispetto a quello turbolento. In realtà la legge logaritmica è già stata introdotta nell'equazione (1.156) che, introducendo le nuove variabili

$$u^+ = \frac{u}{v_{*0}}, \quad y^+ = \frac{y v_{*0}}{\nu}, \quad (1.161)$$

può essere riscritta come

$$u^+(y^+) = A \ln y^+ + D, \quad (1.162)$$

con

$$A = \frac{1}{\kappa}; \quad D = -\frac{1}{\kappa} \ln \beta. \quad (1.163)$$

Applicando tale equazione al caso del flusso in un condotto, dal confronto con i dati sperimentali di Nikuradse validi per pareti lisce, si osserva un buon accordo per i seguenti valori delle costanti:

$$A = 2.5 \implies \kappa = 0.4; \quad D = 5.5 \implies \beta = 0.111.$$

Quindi, per numeri di Reynolds elevati e flusso in condotti con pareti lisce, vale la seguente legge:

$$u^+(y^+) = 2.5 \ln y^+ + 5.5, \quad (1.164)$$

Questa equazione è valida solo per flussi turbolenti, quindi dove gli sforzi d'attrito laminari possono essere trascurati. Nelle immediate vicinanze della parete, gli sforzi turbolenti vanno a zero e l'unico contributo all'attrito è proprio di natura laminare (sottostrato laminare). Pertanto, in tale regione il profilo di velocità non segue la legge fornita dall'equazione (1.164), ma quella corrispondente alla condizione per cui $\tau_0 = \mu u/y$. Dato che $\tau_0 = \rho v_*^2$, si ha:

$$\frac{u}{v_*} = y \frac{v_*}{\nu} \implies u^+(y^+) = y^+. \quad (1.165)$$

Quindi per $y v_*/\nu < 5$ gli sforzi turbolenti sono trascurabili; per $y v_*/\nu > 70$ il contributo laminare è trascurabile, mentre per $5 < y v_*/\nu < 70$ entrambi i contributi sono dello stesso ordine:

$$y \frac{v_*}{\nu} < 5 : \text{ sforzo laminare}; \quad (1.166)$$

$$5 < y \frac{v_*}{\nu} < 70 : \text{ sforzo laminare-turbolento}; \quad (1.167)$$

$$y \frac{v_*}{\nu} > 70 : \text{ sforzo turbolento}. \quad (1.168)$$

Lo spessore del sottostrato laminare risulta $\delta_l \approx 5\nu/v_*$. Il confronto tra i risultati di questa teoria e i dati sperimentali è riportato in figura 1.20.

Nelle realizzazioni pratiche le pareti dei condotti non possono in genere essere considerate come lisce, specialmente per elevati numeri di Reynolds. Infatti la resistenza prodotta da condotti con pareti rugose risulta maggiore di quella di condotti con pareti lisce. La natura del fenomeno può essere ricondotta al parametro adimensionale k/R , dove

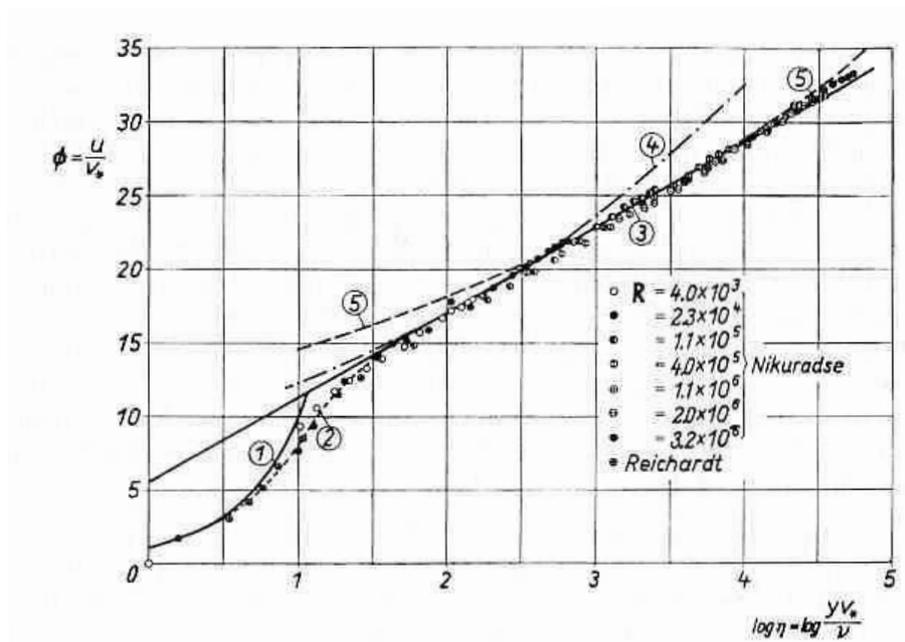


Figura 1.20: Legge universale di parete per condotti lisci (Schlichting, 1968).

k indica l'altezza delle protrusioni e R il raggio del condotto. In particolare, il fenomeno dipende dallo spessore del sottostrato laminare δ_l , per cui il parametro k/δ_l risulta rilevante. La rugosità non produce un incremento della resistenza se k è minore di δ_l , per cui le pareti possono essere considerate lisce. La figura 1.21 riproduce il coefficiente d'attrito, $\lambda = \Delta p / (1/2 \rho u^2) d/L$, in condotti con diversi gradi di rugosità. Per regime laminare tutti i condotti presentano lo stesso comportamento. Quindi, in regime turbolento, esiste un intervallo di Re per cui condotti con data rugosità si comportano come quelli lisce. Infine, per fissato Re , il cui valore aumenta al diminuire di k/R , si osserva un incremento di λ rispetto al caso di parete liscia. Quindi si possono individuare tre diverse regioni:

1. (idraulicamente) liscia:

$$0 \leq \frac{k v_*}{\nu} \leq 5 : \quad \lambda = \lambda(Re);$$

2. transizione:

$$5 \leq \frac{k v_*}{\nu} \leq 70 : \quad \lambda = \lambda(k/R, Re);$$

3. completamente turbolenta:

$$\frac{k v_*}{\nu} > 70 : \quad \lambda = \lambda(k/R).$$

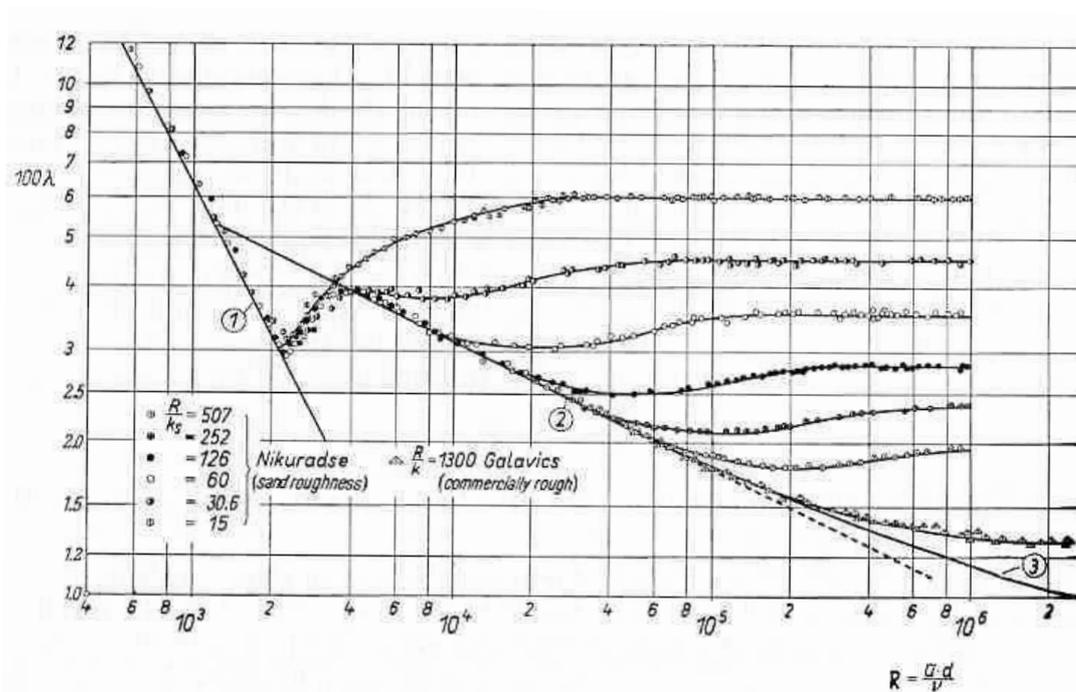


Figura 1.21: Coefficiente d'attrito per condotti: curva (1) flusso laminare; curve (2) e (3) flusso turbolento su parete liscia (Schlichting, 1968).

Di conseguenza la legge logaritmica di parete, equazione (1.154), resta valida se y_0 viene opportunamente determinato:

$$\frac{u}{v_*} = 2.5 \ln \frac{y}{k} + B, \quad (1.169)$$

dove B assume valori diversi nelle diverse regioni sopra definite: per pareti completamente rugose $B = 8.5$, mentre pareti lisce $B = 5.5 + 2.5 \ln(v_* k / \nu)$.

1.4.3 Flusso turbolento su lamina piana

Data la difficoltà di individuare una legge di transizione per il profilo di velocità all'interno di uno strato limite turbolento tra quella valida nel sottostrato laminare e quella valida nella zona completamente turbolenta, il calcolo non può essere effettuato a partire dalle equazioni (1.136) e (1.137), come fatto nel caso laminare. Pertanto si dovrà fare ricorso a metodi approssimati basati sulle equazioni integrali della quantità di moto che, come osservato, sono valide sia nel caso di flusso laminare che in quello di flusso turbolento.

Si affronterà il caso più semplice di flusso su una lamina piana ad incidenza nulla, per cui il gradiente di pressione è nullo, risolvendo l'equazione (1.84), di seguito riportata,

$$\frac{d}{dx} (U^2 \delta_2) + \delta_1 U \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho},$$

e assumendo un'adeguato profilo di velocità nello strato limite. Nel seguito si assume che lo strato limite è turbolento a partire dal bordo d'attacco della lamina ($x = 0$) e, in accordo con l'ipotesi di Prandtl, che la distribuzione di velocità nello strato limite sia identica a quella in un condotto⁷. In tal senso una legge per il profilo di velocità è la seguente,

$$\frac{u}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}, \quad (1.170)$$

dove $\delta = \delta(x)$ è lo spessore dello strato limite (da valutare mediante il calcolo), cui corrisponde la legge per lo sforzo di taglio fornita dall'equazione (1.159),

$$\frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U_\infty \delta}\right)^{1/4}. \quad (1.171)$$

Usando queste equazioni si ricavano i seguenti valori per gli spessori di spostamento e quantità di moto:

$$\delta_1 = \frac{\delta}{8}; \quad \delta_2 = \frac{7}{72} \delta. \quad (1.172)$$

Pertanto, l'equazione integrale diventa

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2}. \quad (1.173)$$

Confrontando le equazioni (1.171) e (1.173) si ha:

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U_\infty \delta}\right)^{1/4}. \quad (1.174)$$

Integrando questa equazione differenziale ordinaria in $\delta(x)$ con condizione iniziale $\delta(0) = 0$, si ottiene l'espressione

$$\delta(x) = 0.37 x \left(\frac{U_\infty x}{\nu}\right)^{-1/5}, \quad (1.175)$$

da cui

$$\delta_2(x) = 0.036 x \left(\frac{U_\infty x}{\nu}\right)^{-1/5}. \quad (1.176)$$

Si nota da queste relazioni come lo spessore dello strato limite aumenta proporzionalmente a $x^{4/5}$, mentre nel caso laminare si ha $\delta \sim x^{1/2}$. La resistenza globale su una lamina piana di lunghezza l e profondità b vale:

$$D = 0.036 \rho U_\infty^2 b l \left(\frac{U_\infty l}{\nu}\right)^{-1/5}. \quad (1.177)$$

⁷Tale ipotesi comporta delle approssimazioni che i dati sperimentali hanno mostrato essere trascurabili per $Re < 10^6$.

Quindi la resistenza totale per flusso turbolento è proporzionale a $U_\infty^{9/5}$ e $l^{4/5}$, mentre per flusso laminare si ha, rispettivamente, $U_\infty^{3/2}$ e $l^{1/2}$. A questo punto si possono valutare i coefficienti d'attrito e di resistenza,

$$c_f = \frac{\tau_0}{1/2 \varrho U_\infty^2}, \quad c_d = \frac{D}{1/2 \varrho U_\infty^2 b l},$$

e sapendo che

$$\tau_0(x) = \varrho U_\infty^2 \frac{d\delta_2}{dx} \quad (1.178)$$

$$D(x) = \varrho b U_\infty^2 \delta_2(x) \quad (1.179)$$

si ha:

$$c_f = 2 \frac{d\delta_2}{dx}, \quad c_d = 2 \frac{\delta_2(l)}{l}. \quad (1.180)$$

Usando l'equazione (1.176) si ha:

$$c_f = 0.0576 \left(\frac{U_\infty x}{\nu} \right)^{-1/5}, \quad c_d = 0.072 \left(\frac{U_\infty l}{\nu} \right)^{-1/5}. \quad (1.181)$$

In realtà la seconda equazione costituisce un'ottima stima dei dati sperimentali per flussi turbolenti lungo tutta la lamina (a partire dal bordo d'attacco), se si usa il valore 0.074 al posto di 0.072:

$$c_d = 0.074 (Re_l)^{-1/5}, \quad 5 \cdot 10^5 < Re_l < 10^7. \quad (1.182)$$

Apportando la stessa correzione al coefficiente di attrito si ha:

$$c_f = 0.0592 (Re_x)^{-1/5} = 0.0256 \left(\frac{U_\infty \delta_2}{\nu} \right)^{-1/4}. \quad (1.183)$$

L'equazione (1.182) è valida nell'ipotesi che il flusso sia turbolento a partire dal bordo d'attacco della lamina. In generale il flusso è laminare a partire dal bordo d'attacco e subisce la transizione turbolenta ad una certa distanza. La posizione del punto di transizione dipende dall'intensità turbolenta del flusso indisturbato ed è definita da un numero di Reynolds critico, $Re_{cr} = (U_\infty x/\nu)_{cr}$, compreso tra $3 \cdot 10^5$ e $3 \cdot 10^6$. La presenza di una porzione laminare dello strato limite comporta una riduzione del coefficiente di resistenza rispetto al valore fornito dall'equazione (1.182). Pertanto la suddetta equazione viene corretta come segue:

$$c_d = \frac{0.074}{Re_l^{1/5}} - \frac{A}{Re_l}, \quad 5 \cdot 10^5 < Re_l < 10^7, \quad (1.184)$$

dove A vale 1050, 1700, 3300, 8700 rispettivamente per Re_{cr} pari a $3 \cdot 10^5$, $5 \cdot 10^5$, 10^6 , $3 \cdot 10^6$.

Per applicazioni con $Re > 10^7$ risultati accurati si ottengono utilizzando nel procedimento sopra descritto la legge universale di parete al posto della legge di potenza. I passaggi, tuttavia, non sono semplici come nel caso precedente e non verranno quindi descritti. La legge universale si scrive

$$u^+(y^+) = A \ln y^+ + D, \quad (1.185)$$

con

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{v_*}, \quad y^+ = \frac{yv_*}{\nu}. \quad (1.186)$$

Dal confronto coi dati sperimentali i valori delle costanti sono i seguenti:

$$A = 5.85 \quad D = 5.56. \quad (1.187)$$

Il coefficiente di resistenza è ben approssimato dalla seguente relazione:

$$c_d = \frac{0.455}{(\log Re_l)^{2.58}} - \frac{A}{Re_l}, \quad 10^7 < Re_l < 10^9, \quad (1.188)$$

che conteggia anche la correzione dovuta alla presenza di una porzione laminare attraverso il coefficiente A , i cui valori sono identici a quelli usati nell'equazione (1.184). L'equazione (1.188) è noto come *equazione di Prandtl-Schlichting per il coefficiente di attrito su una lamina piana ad incidenza nulla*.

In molte applicazioni la parete della lamina non può essere considerata (idraulicamente) liscia. Il parametro che individua la rugosità relativa è il rapporto tra l'altezza delle asperità e lo spessore dello strato limite, k/δ . La differenza tra questo caso e quello del flusso in un condotto consiste nel fatto che la rugosità relativa decresce lungo la lamina (k è circa costante, mentre δ aumenta), mentre in un condotto k/R rimane costante. Assumendo che lo strato limite sia turbolento a partire dal bordo d'attacco, si avrà dapprima un flusso su parete rugosa, seguito da una zona di transizione e, infine, si potrà avere un flusso su parete liscia. I limiti tra le diverse zone sono individuati dal parametro adimensionale v_*k/ν , come visto nel caso di flusso in condotti. I risultati ottenuti in questo caso possono essere estesi al caso del flusso su lamina piana come visto in precedenza. I calcoli, basati sulla legge universale di parete, equazione (1.169), portano ai risultati mostrati nelle figure 1.22 e 1.23. La prima figura fornisce il coefficiente di resistenza in funzione del numero di Reynolds $U_\infty l/\nu$ per diversi valori di l/k , mentre la seconda fornisce il coefficiente d'attrito in funzione di $U_\infty x/\nu$ per diversi valori di x/k . I grafici riportano anche le curve (tratteggiate) che delimitano la zona completamente rugosa. In tale zona valgono le seguenti formule di interpolazione:

$$c_f = \left(2.87 + 1.58 \log \frac{x}{k}\right)^{-2.5}, \quad (1.189)$$

$$c_d = \left(1.89 + 1.62 \log \frac{l}{k}\right)^{-2.5}, \quad (1.190)$$

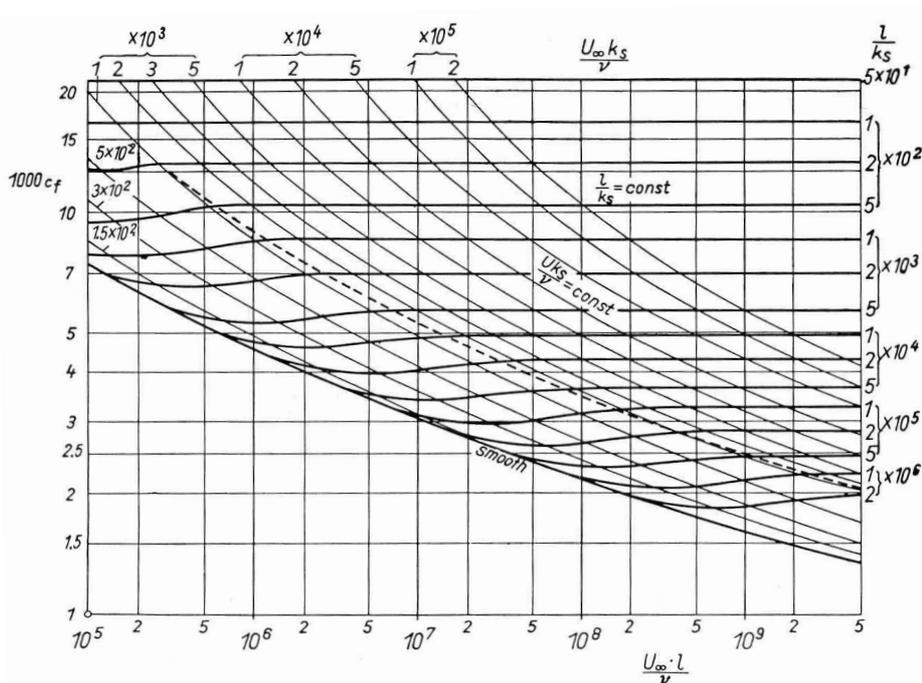


Figura 1.22: Coefficiente di resistenza per lamina piana (Schlichting, 1968).

con $10^2 < l/k < 10^6$.

In relazione a tale argomento è rilevante definire la *rugosità ammissibile* come la massima rugosità, ammissibile in applicazioni ingegneristiche, che non comporta incrementi di resistenza rispetto al caso di parete liscia. Tale misura è rilevante in quanto legata alla lavorazione (quindi al costo) che si richiede per il manufatto. Nel caso di strato limite turbolento la parete può essere considerata liscia se le protuberanze sono contenute all'interno del sottostrato laminare, il cui spessore è una piccola frazione dello spessore dello strato limite. Come visto nel caso di flusso in condotti, la condizione per cui una parete possa essere considerata liscia è

$$\frac{v_* k}{\nu} < 5, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}. \quad (1.191)$$

Tale risultato sarà considerato valido anche per il caso di lamina piana ad incidenza nulla. Dal punto di vista pratico è più immediato esprimere tale risultato in funzione della rugosità relativa k/l . Dal grafico di figura 1.22 si ottiene il valore ammissibile per k/l dal punto in cui una curva per dato valore di $l/k = \text{const}$. si stacca dalla curva relativa alla parete liscia: si nota come il valore ammissibile di k/l diminuisce all'aumentare di $U_\infty l/\nu$. Una relazione approssimata per la determinazione della rugosità ammissibile è la seguente:

$$\frac{U_\infty k_a}{\nu} = 100, \quad (1.192)$$

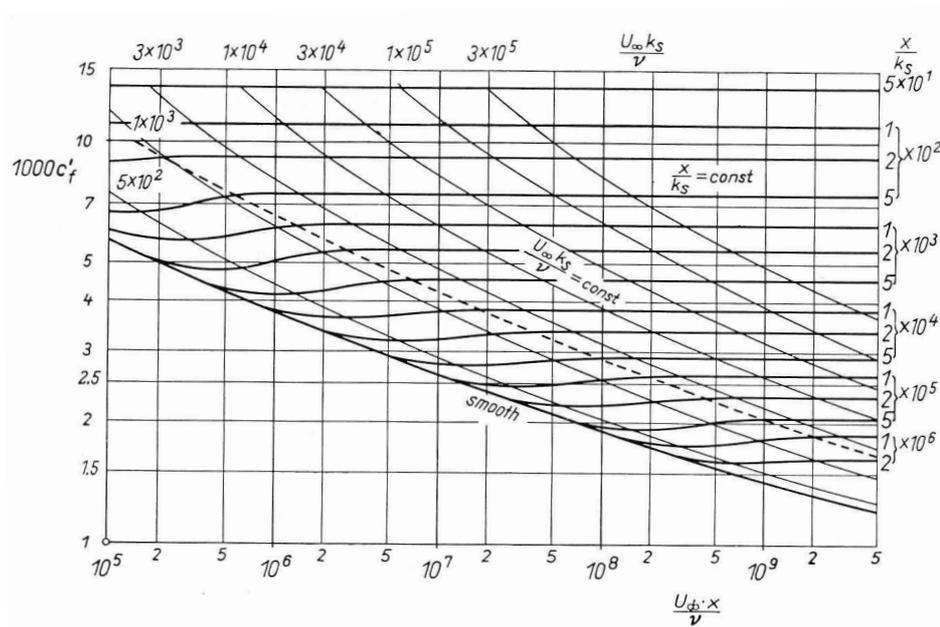


Figura 1.23: Coefficiente d'attrito per lamina piana (Schlichting, 1968).

che, seppur approssimata, fornisce un solo valore di k_a per tutta la lamina:

$$k_a \leq 100 \frac{\nu}{U_\infty}. \quad (1.193)$$

Per le applicazioni è ancora più pratico legare la rugosità ammissibile direttamente alla lunghezza della lamina (o del corpo in esame). A tale scopo l'equazione (1.193) si può riscrivere

$$k_a \leq l \frac{100}{Re_l}. \quad (1.194)$$

Nel valutare l'effetto del gradiente di pressione sullo strato limite turbolento, si usa lo spessore di quantità di moto, δ_2 , come dimensione caratteristica dello strato limite. Per conteggiare il gradiente di pressione e quindi la sua influenza sul profilo di velocità si definisce il seguente parametro adimensionale

$$\Gamma = \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} \left(\frac{U \delta_2}{\nu} \right)^{1/4}, \quad (1.195)$$

corrispondente a quello usato nel caso di flusso laminare, equazione (1.101). Per $\Gamma > 0$ il flusso accelera, mentre per $\Gamma < 0$ decelera. In base a misurazioni sperimentali si ha separazione per $\Gamma \approx -0.06$. Un parametro alternativo per definire la forma del profilo di

velocità in presenza di gradiente di pressione è

$$\eta = 1 - \left(\frac{u(\delta_2)}{U} \right)^2, \quad (1.196)$$

dove $u(\delta_2)$ indica la velocità nello strato limite misurata alla distanza δ_2 dalla parete. L'utilità di tale parametro è dimostrata dal grafico in figura 1.24 che riporta i dati sperimentali di Nikuradse: quando la pressione diminuisce $\eta < 0.46$ mentre quando aumenta $\eta > 0.46$; si ha separazione per $\eta \approx 0.8$. In corrispondenza della separazione il fattore di

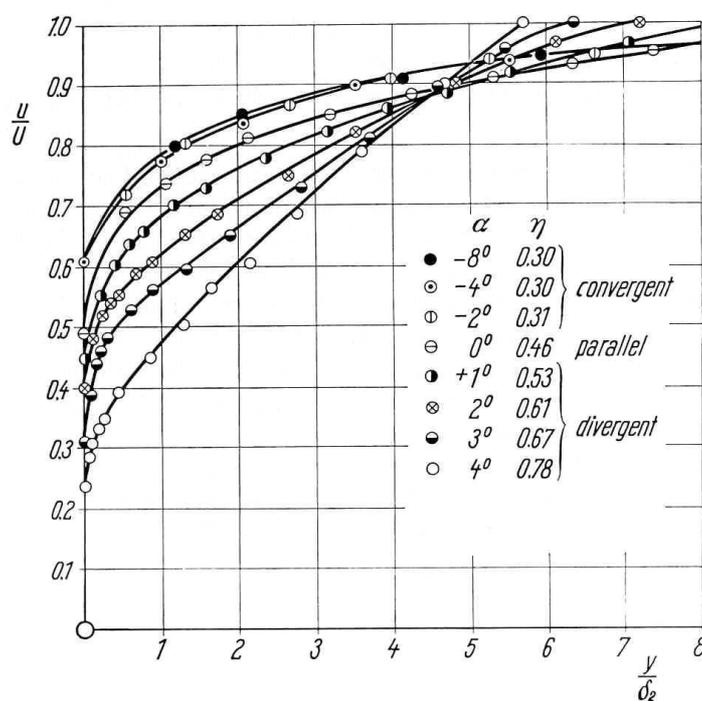


Figura 1.24: Profili di velocità in canali convergenti e divergenti: u/U in funzione di y/δ_2 (Schlichting, 1968).

forma $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ è compreso tra 1.8 e 2.4. Questo si può dedurre osservando che esiste una corrispondenza tra H_{12} e η , riportata in figura 1.25, che si può ricavare assumendo che il profilo di velocità possa essere espresso mediante una legge del tipo $u/U = (y/\delta)^{1/n}$. Infatti, per tale legge si ha

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{1}{1+n}, \quad \frac{\delta_2}{\delta} = \frac{n}{(1+n)(2+n)},$$

da cui

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{2+n}{n}, \quad \implies \quad n = \frac{2}{H_{12} - 1};$$

quindi:

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \frac{H_{12} - 1}{H_{12}(H_{12} + 1)}, \quad \Rightarrow \quad \eta = 1 - \left[\frac{H_{12} - 1}{H_{12}(H_{12} + 1)} \right]^{H_{12}-1}.$$

Il confronto tra i risultati di questa relazione e i dati sperimentali, figura 1.25, mostra un buon accordo.

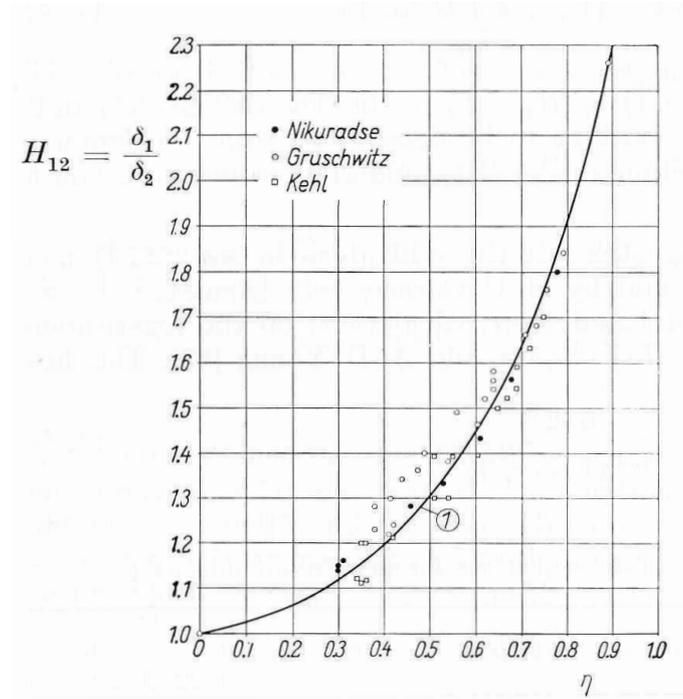


Figura 1.25: Andamento del fattore di forma H_{12} in funzione di η (Schlichting, 1968).

La maggior parte dei metodi per il calcolo di δ_2 usa l'equazione integrale dello strato limite, equazione (1.84), che può essere riscritta nella forma seguente:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (H_{12} + 2) \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U^2}. \quad (1.197)$$

Quindi, per valutare la variazione di δ_2 lungo la parete bisogna conoscere H_{12} e $\tau_0/(\rho U^2)$. Nel caso di lamina piana ad incidenza nulla si può supporre che lo sforzo di taglio sia pari a quella fornito dall'equazione (1.183), con la differenza che in questo caso la velocità esterna non è costante. Quindi:

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{\alpha}{(U \delta_2 / \nu)^{1/n}}, \quad (1.198)$$

dove

$$n = 4 : \quad \alpha = 0.0128 \quad (\text{vedi equazione (1.183)})$$

$$n = 6 : \quad \alpha = 0.0065.$$

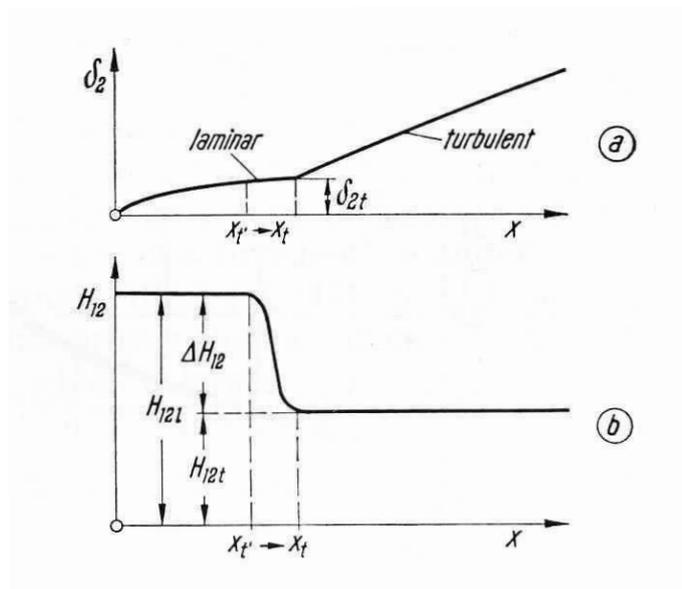


Figura 1.26: Variazione dello spessore di quantità di moto e del fattore di forma in corrispondenza della transizione (Schlichting, 1968).

Poiché H_{12} è presente solo come coefficiente del secondo termine a primo membro, as-

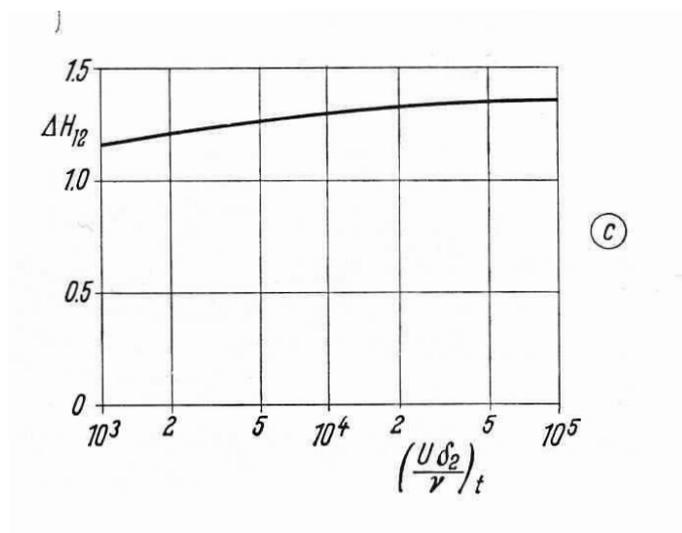


Figura 1.27: Variazione di ΔH_{12} con $(U \delta_2 / \nu)_t$ (Schlichting, 1968).

sumendo un valore medio, che per la lamina piana è $H_{12} = 1.4$, e la semplificazione

introdotta dall'equazione (1.198), l'equazione (1.197) può essere integrata:

$$\delta_2 \left(\frac{U \delta_2}{\nu} \right)^{1/n} = U^{-b} \left(C_1 + a \int_{x=x_t}^x U^b dx \right) \quad (1.199)$$

con

$$a = \frac{n+1}{n} \alpha \quad b = \frac{n+1}{n} (H_{12} + 2) - \frac{1}{n},$$

in cui x_t indica l'ascissa di transizione e C_1 è una costante determinata dalla soluzione dello strato limite laminare a x_t . Inoltre, nell'ipotesi di validità dell'equazione (1.198) si ha:

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{0.0288}{\left[\log \left(4.075 \frac{U \delta_2}{\nu} \right) \right]^2}, \quad (1.200)$$

Si osserva che si possono usare procedure più accurate per il calcolo di δ_2 e di τ_0 . Tuttavia, è necessario in ogni caso considerare che in corrispondenza della transizione il fattore di forma diminuisce della quantità ΔH_{12} , come mostrato in figura 1.26; inoltre, ΔH_{12} dipende dal valore alla transizione del numero di Reynolds basato sulla quantità di moto, $Re_{2,t} = (U \delta_2 / \nu)_t$, come illustrato nella figura 1.27.

1.5 Flusso comprimibile

1.5.1 Flusso laminare

L'analisi condotta nei paragrafi precedenti è valida nell'ipotesi di flusso incomprimibile. Nei flussi in cui la comprimibilità e la variazione di temperatura non sono trascurabili bisognerà affrontare lo studio prendendo in considerazione anche le variazioni di ρ e T , utilizzando l'equazione dell'energia. Ad esempio, l'equazione di conservazione dell'energia termodinamica si scrive

$$\rho \frac{De}{Dt} + p \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \mu \Phi, \quad (1.201)$$

dove e indica l'energia interna per unità di massa e $\Phi = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}$ la funzione di dissipazione. Poiché, grazie all'equazione di conservazione della massa, risulta

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (1.202)$$

e ricordando che

$$dh = de + d \left(\frac{p}{\rho} \right) \implies c_p dT = c_v dT + d \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad (1.203)$$

l'equazione (1.201) diventa:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \mu \Phi. \quad (1.204)$$

Anche per questa equazione si può condurre un'analisi dell'ordine di grandezza dei vari termini all'interno dello strato limite. A tale scopo conviene riscrivere la stessa in forma adimensionale (θ indica la temperatura adimensionalizzata mediante $(\Delta T)_0 = T_w - T_\infty$) e per flussi stazionari bidimensionali:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr Re} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + E \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + E \frac{1}{Re} \Phi, \quad (1.205)$$

$$1 \quad 1 \quad \delta \quad \frac{1}{\delta_T} \quad \delta_T^2 \quad 1 \quad \frac{1}{\delta_T^2} \quad 1 \quad 1 \quad \delta \quad \delta \quad \delta^2 \quad \frac{1}{\delta^2}.$$

Nell'equazione precedente è stato indicato con δ_T lo spessore dello strato limite termico, mentre Pr e E indicano, rispettivamente, il numero di Prandtl e il numero di Eckert:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k}, \quad E = \frac{U_\infty^2}{c_p (\Delta T)_0}, \quad (1.206)$$

con $(\Delta T)_0 = T_w - T_\infty$, differenza tra la temperatura di parete e quella del flusso indisturbato. Si noti che Pr è di ordine 1 per i gas (circa 0.7 per l'aria) e variabile tra 10 e 1000 per liquidi. Dall'equazione (1.205) si deduce che

$$\left(\frac{\delta_T}{L} \right)^2 \sim \frac{1}{Pr Re}, \quad (1.207)$$

e, poiché $\delta \sim 1/\sqrt{Re}$, si ha:

$$\frac{\delta_T}{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{Pr}}, \quad (1.208)$$

da cui si ottiene un'utile stima del rapporto tra strato limite termico e cinematico: per i gas essi saranno all'incirca dello stesso ordine di grandezza, mentre per i liquidi lo strato limite termico sarà inferiore a quello cinematico.

In questo modo, le equazioni dello strato limite, nell'ipotesi di flusso stazionario bidimensionale, si scrivono (in forma dimensionale):

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (1.209)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1.210)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = u \frac{dp}{dx} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (1.211)$$

con condizioni al contorno:

$$y = 0: \quad u = v = 0; \quad T = T_w; \quad y = \infty: \quad u = U(x); \quad T = T(x);$$

Il sistema precedente è chiuso dall'equazione di stato $p/\varrho = RT$ e dalla legge di variazione di μ con la temperatura. Nel caso dell'aria la formula di Sutherland fornisce risultati accurati:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S}, \quad (1.212)$$

dove μ_0 indica la viscosità alla temperatura T_0 ($\mu_0 = 1.7894 \cdot 10^{-5} \text{ kg}/(\text{ms})$ a $T_0 = 273.11 \text{ K}$), mentre $S = 110 \text{ K}$.

Nel caso semplice di flusso su una lamina piana ad incidenza nulla e ipotizzando il flusso incomprimibile e a proprietà costanti, le equazioni che governano il flusso si scrivono:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.213)$$

$$\varrho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1.214)$$

$$\varrho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (1.215)$$

In questo caso limite la temperatura risulta indipendente dalla velocità, per cui si possono prima risolvere le prime due equazioni e quindi il campo di temperatura. Nel caso in cui il termine di dissipazione nell'equazione (1.215) può essere trascurato, le equazioni di quantità di moto ed energia sono formalmente identiche (con T al posto di u) se

$$\frac{\mu}{\varrho} = \frac{k}{c_p \varrho} \implies Pr = 1.$$

Quindi in questo caso il campo di temperatura esiste solo se $T_\infty - T_w > 0$ (sottrazione di calore), e la distribuzione di temperatura è

$$\frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{u}{U_\infty} \quad (Pr = 1). \quad (1.216)$$

Lasciando il termine dissipativo nell'equazione (1.215), la distribuzione di temperatura sarà fornita dalla soluzione della seguente equazione:

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + \frac{Pr}{2} f \frac{dT}{d\eta} = -Pr \frac{U_\infty^2}{c_p} f''^2, \quad (1.217)$$

dove f e η sono le funzioni introdotte per la soluzione di Blasius. Questa equazione può essere risolta usando la sovrapposizione di due soluzioni:

$$T(\eta) - T_\infty = C \theta_1(\eta) + \frac{U_\infty^2}{2 c_p} \theta_2(\eta), \quad (1.218)$$

dove $\theta_1(\eta)$ indica la soluzione dell'omogenea associata e $\theta_2(\eta)$ una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Inoltre, per comodità, si assume che $\theta_1(\eta)$ sia la soluzione

del problema con scambio termico con data differenza di temperatura, $T_w - T_\infty$, mentre per $\theta_2(\eta)$ si adotta la condizione adiabatica a parete. In questo modo si hanno i due problemi seguenti:

$$\theta_1'' + \frac{1}{2} Pr f \theta_1' = 0, \quad (1.219)$$

con $\theta_1 = 1$ per $\eta = 0$ e $\theta_1 = 0$ per $\eta = \infty$;

$$\theta_2'' + \frac{1}{2} Pr f \theta_2' = -2 Pr f''^2, \quad (1.220)$$

con $\theta_2' = 0$ per $\eta = 0$ e $\theta_2 = 0$ per $\eta = \infty$. Il valore $\theta_2(0)$ consente il calcolo di C nell'equazione (1.218) in modo che $T = T_w$ per $\eta = 0$:

$$C = T_w - T_\infty - \frac{U_\infty^2}{2 c_p} \theta_2(0). \quad (1.221)$$

La soluzione dell'equazione (1.219) è riportata in figura 1.28 per diversi valori di Pr . Come già osservato in precedenza, per $Pr = 1$ l'andamento coincide con quello del profilo di velocità. Per $Pr > 1$ lo strato limite termico è più piccolo di quello cinematico, mentre per $Pr < 1$ risulta più grande. Considerando ora la soluzione dell'equazione (1.220),

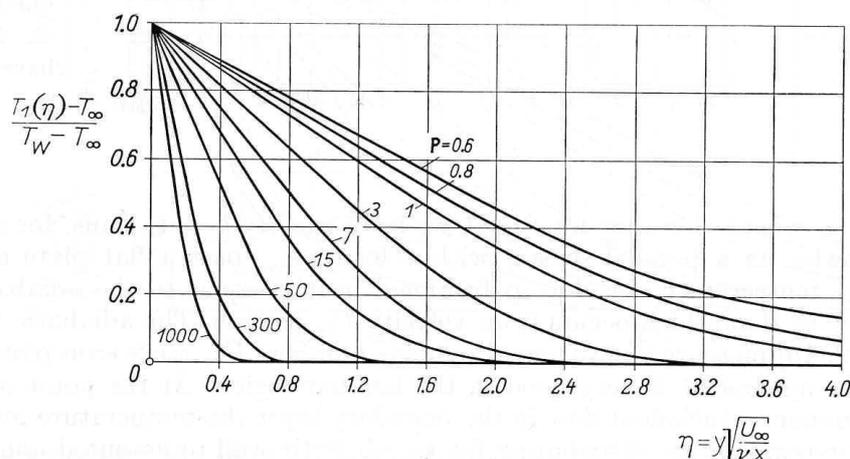


Figura 1.28: Distribuzione di temperatura su una lamina piana ad incidenza nulla in presenza di scambio termico (Schlichting, 1968).

la distribuzione di temperatura su una parete adiabatica può essere espressa in forma adimensionale come:

$$\frac{T_2(\eta) - T_\infty}{T_{2w} - T_\infty} = \frac{T_2(\eta) - T_\infty}{T_a - T_\infty} = \frac{\theta_2(\eta, Pr)}{b(Pr)}, \quad (1.222)$$

dove T_a indica la temperatura adiabatica di parete:

$$T_{2w} - T_\infty = T_a - T_\infty = \frac{U_\infty^2}{2c_p} b(Pr), \quad b(Pr) = \theta_2(0, Pr). \quad (1.223)$$

Per valori bassi di Pr si può assumere $b = \sqrt{Pr}$, mentre per $Pr \rightarrow \infty$ si ha $b(Pr) = 1.9 \cdot Pr^{1/3}$. La temperatura adiabatica di parete al variare del numero di Reynolds $U_\infty x/\nu$ è riportata in figura 1.29: l'accordo tra l'equazione (1.223) e i dati sperimentali è buono per flusso laminare; in corrispondenza della transizione si osserva un improvviso aumento. La distribuzione di temperatura dell'equazione (1.222) è riportata in figura 1.30 per diversi valori di Pr . La soluzione generale dell'equazione (1.218) è infine riportata in

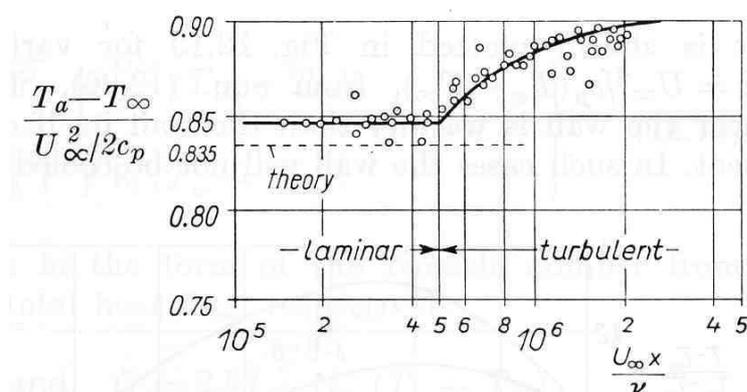


Figura 1.29: Temperatura adiabatica di parete su una lamina piana ad incidenza nulla per $Pr = 0.7$ (Eckert e Weise, 1942).

figura 1.31 per diversi valori del numero di Eckert, $E = U_\infty^2/[c_p(T_w - T_\infty)]$. Per $E > 0$ si ha introduzione di calore e per $E < 0$ sottrazione di calore. Inoltre, per $bE = 2$ si ha la condizione di parete adiabatica; quindi per $bE > 2$ lo strato limite a parete risulta più caldo della parete stessa a causa del calore generato per attrito.

Il flusso termico a parete

$$q(x) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0} \quad (1.224)$$

può essere espresso mediante il parametro adimensionale

$$N(x) = -\frac{l}{(\Delta T)_0} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0} \quad (1.225)$$

da cui

$$q(x) = \frac{k}{l} N (T_w - T_\infty) = \frac{k}{l} N (\Delta T)_0. \quad (1.226)$$

Nel caso si trascuri l'effetto del calore di dissipazione e la soluzione è espressa come

$$T(\eta) - T_\infty = (T_w - T_\infty) \theta_1(\eta),$$

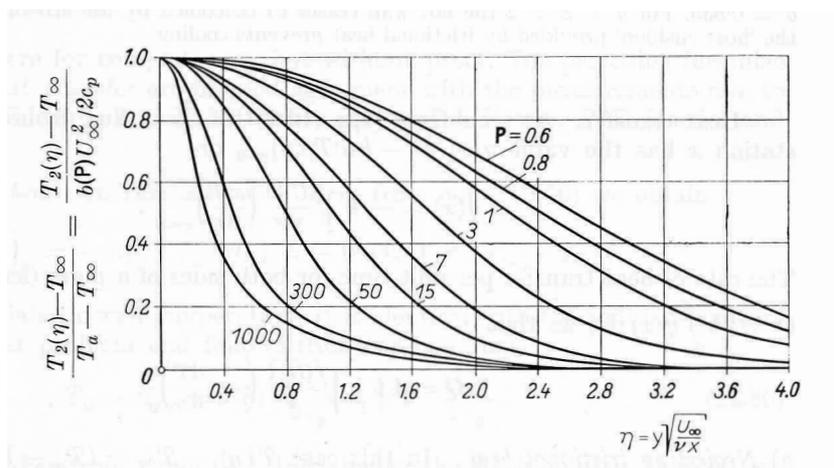


Figura 1.30: Distribuzione della temperatura T_2 su una lamina piana ad incidenza nulla in presenza di parete adiabatica (Schlichting, 1968).

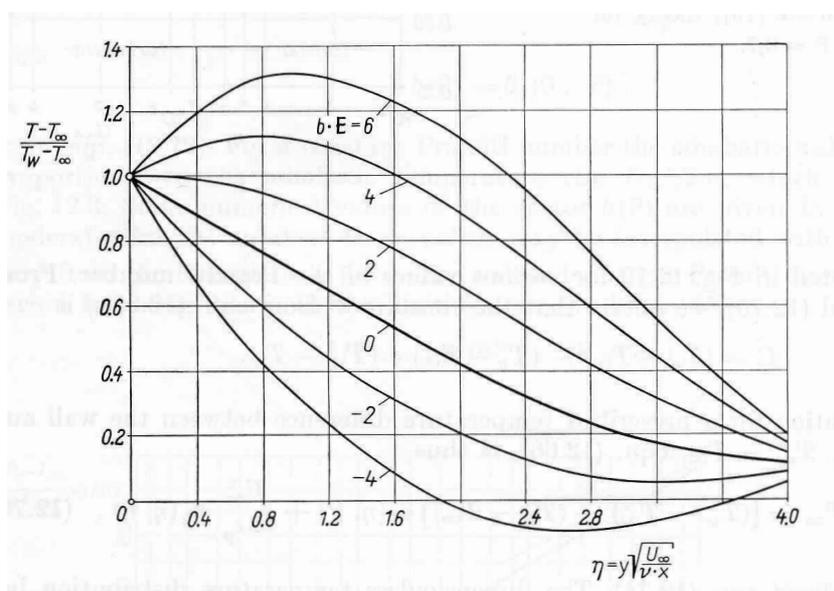


Figura 1.31: Distribuzione di temperatura nello strato limite laminare su una lamina piana ad incidenza nulla per $Pr = 0.7$ (Schlichting, 1968).

si ha:

$$q(x) = 0.332 k (Pr)^{1/3} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} (T_w - T_\infty); \quad (1.227)$$

il flusso termico sull'intera lamina vale:

$$Q = 2b \int_0^l q(x) dx = 1.332 b k (Pr)^{1/3} \sqrt{Re_l} (T_w - T_\infty). \quad (1.228)$$

Il numero di Nusselt locale assume la forma seguente:

$$\begin{aligned} N(x) &= 0.564 \sqrt{Pr} \sqrt{Re_x}, & \text{per } Pr \rightarrow 0; \\ N(x) &= 0.332 Pr^{1/3} \sqrt{Re_x}, & \text{per } 0.6 < Pr < 10; \\ N(x) &= 0.339 Pr^{1/3} \sqrt{Re_x}, & \text{per } Pr \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Il flusso termico totale vale invece:

$$\frac{N_m}{\sqrt{Re_l}} = 2 \frac{N_x}{\sqrt{Re_x}}.$$

Nel caso di flusso turbolento le precedenti equazioni si modificano nel modo seguente:

$$\begin{aligned} N_x &= 0.0296 Pr^{1/3} Re_x^{0.8} \\ N_m &= 0.037 Pr^{1/3} Re_l^{0.8} \end{aligned}$$

Nel caso in cui l'effetto del calore di dissipazione non può essere trascurato, si ha:

$$\left(\frac{dT}{d\eta} \right)_0 = -0.332 Pr^{1/3} (T_w - T_a), \quad (1.229)$$

dove T_a è la temperatura adiabatica di parete. Usando l'equazione (1.223) si ha:

$$T_a - T_\infty = \frac{U_\infty^2}{2 c_p} b(Pr) = \sqrt{Pr} \frac{U_\infty^2}{2 c_p}. \quad (1.230)$$

Quindi:

$$q(x) = 0.332 k (Pr)^{1/3} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} (T_w - T_a); \quad (1.231)$$

$$Q = 1.332 b k (Pr)^{1/3} \sqrt{Re_l} (T_w - T_a). \quad (1.232)$$

Torniamo ora al caso generale della soluzione delle equazioni (1.209)-(1.211) e analizziamo il caso semplice $Pr = 1$ in cui l'integrazione delle equazioni bidimensionali (indipendentemente dalla forma del corpo) si semplifica di molto. Infatti, in tale situazione indipendentemente dalla forma della funzione $\mu(T)$, la temperatura dipende solo dalla componente di u parallela alla parete, $T = T(u)$. Questa proprietà può essere dedotta dalle equazioni dello strato limite, equazioni (1.209)-(1.211). Sapendo che il gradiente di pressione è dato dalla soluzione del flusso potenziale esterno,

$$\frac{dp}{dx} = -\varrho_1 U \frac{dU}{dx} = \varrho_1 c_p \frac{dT_1}{dx}, \quad (1.233)$$

e poiché $\partial p/\partial y = 0$ in tutti i punti x lungo la parete, si ha:

$$\varrho(x, y) T(x, y) = \varrho_1(x, y) T_1(x, y). \quad (1.234)$$

Assumendo che $T = T(u)$ nelle equazioni (1.209)-(1.211), dall'equazione (1.211) si ha:

$$\varrho c_p T_u \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k T_u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (1.235)$$

dove $T_u = dT/du$. Assumendo che il numero di Prandtl, $Pr = \mu c_p/k$, sia indipendente dalla temperatura, la precedente equazione si può scrivere come segue:

$$-\frac{dp}{dx} (c_p T_u + u) + c_p \frac{Pr - 1}{Pr} T_u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (T_{uu} k + \mu) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (1.236)$$

La soluzione di questa equazione è anche soluzione del sistema (1.209)-(1.211) se:

$$\frac{dp}{dx} = 0: \quad Pr = 1 \quad \text{e} \quad T = -\frac{\mu}{k} = -\frac{1}{c_p}; \quad (1.237)$$

oppure

$$\frac{dp}{dx} \neq 0: \quad \text{vale la condizione aggiuntiva} \quad T_u(0) = 0. \quad (1.238)$$

La relazione che lega T ad u si ottiene per integrazione:

$$T(u) = -\frac{u^2}{2 c_p} + C_1 u + C_2.$$

Nel caso di parete adiabatica si ha la seguente soluzione:

$$T = T_1 + \frac{1}{2 c_p} (U^2 - u^2). \quad (1.239)$$

La temperatura adiabatica di parete, $T = T_a$ per $u = 0$ vale

$$T_a = T_1 + \frac{U^2}{2 c_p} \quad (1.240)$$

ovvero

$$T_a = T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right), \quad Pr = 1. \quad (1.241)$$

In presenza di scambio termico, per il caso di lamina piana con $dp/dx = 0$ si ha la seguente soluzione:

$$\frac{T - T_w}{T_\infty} = \left(1 - \frac{T_w}{T_\infty} \right) \frac{u}{U_\infty} + \frac{U_\infty^2}{2 c_p T_\infty} \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right), \quad (1.242)$$

che, espressa in funzione del numero di Mach, diventa:

$$\frac{T - T_w}{T_\infty} = \left(1 - \frac{T_w}{T_\infty} \right) \frac{u}{U_\infty} + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right), \quad (1.243)$$

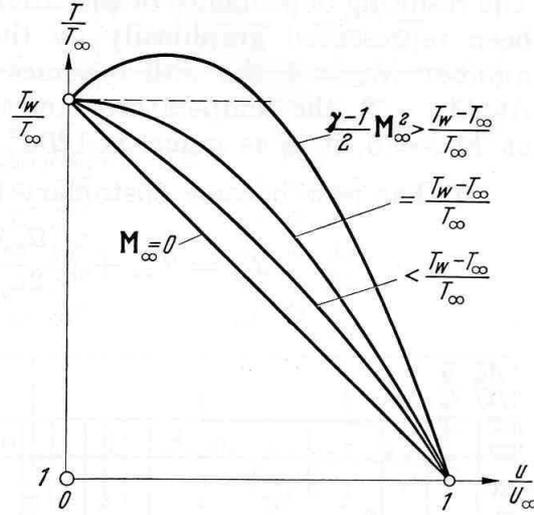


Figura 1.32: Relazione tra temperatura e velocità per flusso comprimibile laminare su lamina piana con contributo di calore di dissipazione $Pr = 1$ (Schlichting, 1968).

Nel caso limite $M_\infty \rightarrow 0$, questa equazione si semplifica al caso di flusso incomprimibile, equazione (1.216). L'equazione (1.242) è diagrammata in figura 1.32.

Dalle relazioni precedenti si possono ricavare le equazioni valide per il caso di lamina piana ad incidenza nulla. Nel caso di parete adiabatica, sostituendo $T_1 = T_\infty$ nell'equazione (1.239), la distribuzione di temperatura diventa:

$$T = T_\infty + \frac{1}{2c_p}(U_\infty^2 - u^2), \quad (1.244)$$

e la temperatura adiabatica di parete vale:

$$T_a = T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2c_p} = T_\infty \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right), \quad Pr = 1. \quad (1.245)$$

È stato verificato che per Pr diversi dall'unità la distribuzione di temperatura differisce di poco per gli effetti di comprimibilità da quella valida per flussi incomprimibili, equazione (1.230). Quindi, nel caso di parete adiabatica si ha:

$$T_a = T_\infty + \sqrt{Pr} \frac{U_\infty^2}{2c_p} = T_\infty \left(1 + \sqrt{Pr} \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right). \quad (1.246)$$

Questa equazione può essere riscritta nel modo seguente:

$$T_a = T_\infty + r \frac{U_\infty^2}{2c_p} = T_\infty \left(1 + r \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right), \quad (1.247)$$

dove è stato introdotto il *coefficiente di recupero*. Dalle equazioni (1.246) e (1.247) si ha che il fattore di recupero vale $r = \sqrt{Pr}$ e la dipendenza dal numero di Mach è trascurabile; per aria, $Pr = 0.723$, il valore $r = 0.851$ è in buon accordo coi dati sperimentali. In questo caso, le distribuzioni di velocità e temperatura sono fornite nelle figure 1.33. I

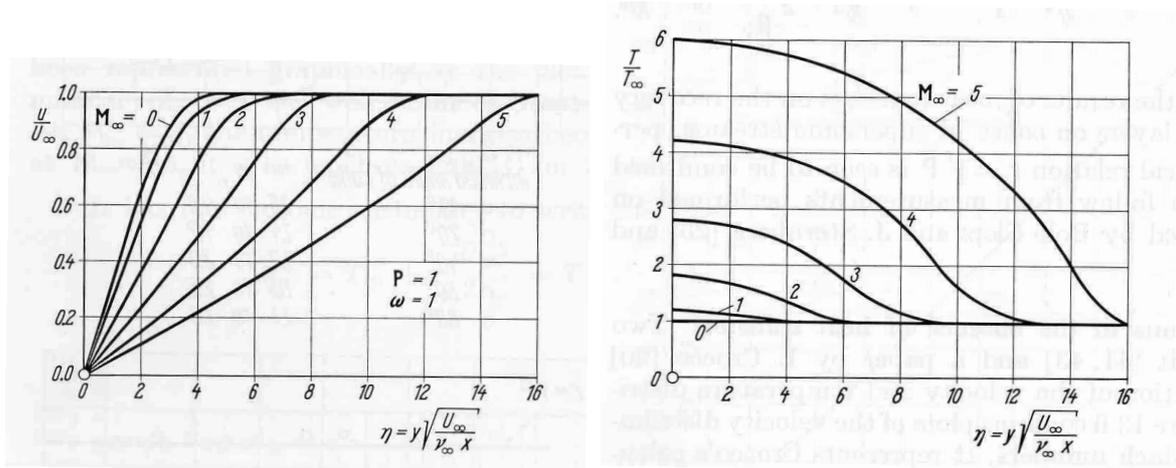


Figura 1.33: Distribuzione di velocità (sinistra) e temperatura (destra) in un flusso comprimibile laminare su lamina piana adiabatica. Soluzione ottenuta da Crocco (1941) per $Pr = 1$, $\gamma = 1.4$ usando una legge di viscosità $\mu/\mu_0 = (T/T_0)$.

profili di velocità in figura 1.33 si possono far quasi coincidere adottando una diversa definizione di distanza adimensionale che usi la viscosità cinematica locale a parete, ν_w , al posto di quella del flusso indisturbato, ν_∞ , come mostrato in figura 1.34. Questo indica che l'incremento dello spessore dello strato limite col numero di Mach è principalmente dovuto all'aumento di volume causato dall'aumento di temperatura a parete. Ancora, in tale configurazione, la distribuzione del coefficiente d'attrito è riportata in figura 1.35 al variare del numero di Mach. Nel caso di scambio termico, la relazione tra distribuzione di velocità e temperatura è la seguente:

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{u}{U_\infty} \right)^2 \right] + \frac{T_w - T_{ad}}{T_\infty} \left[1 - \frac{u}{U_\infty} \right], \quad (1.248)$$

con T_{ad} è dato dall'equazione (1.245). Per numero di Prandtl diverso da uno, questa relazione può essere approssimata introducendo il fattore di recupero:

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{u}{U_\infty} \right)^2 \right] + \frac{T_w - T_{ad}}{T_\infty} \left[1 - \frac{u}{U_\infty} \right], \quad (1.249)$$

in cui T_{ad} è fornito dall'equazione (1.246). La direzione del flusso termico può essere dedotta dall'equazione (1.249): per $T_w - T_\infty > \sqrt{Pr} U_\infty^2 / 2 c_p$ il flusso è diretto dalla parete verso il gas, viceversa se $T_w - T_\infty < \sqrt{Pr} U_\infty^2 / 2 c_p$ è diretto dal gas verso la parete. Le

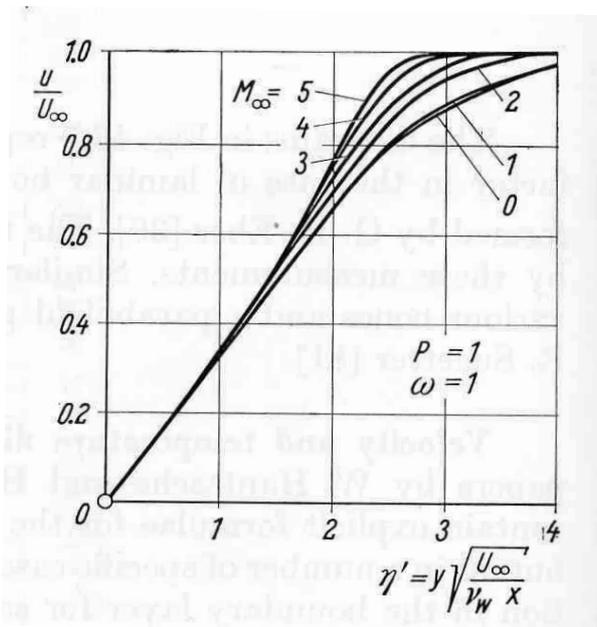


Figura 1.34: Distribuzione di velocità in un flusso comprimibile laminare su lamina piana adiabatica: rielaborazione dei dati della figura 1.33 con distanza da parete adimensionalizzata mediante $\sqrt{\nu_w x/U_\infty}$.

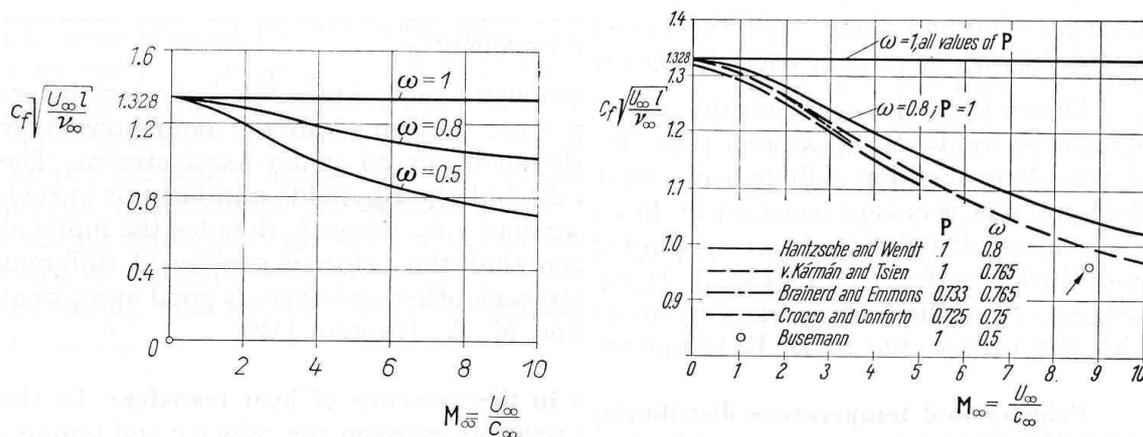


Figura 1.35: Coefficiente d'attrito in un flusso comprimibile laminare su lamina piana adiabatica. Sinistra: soluzione ottenuta da Hantzsche e Wendt (1940) per $Pr = 1$, $\gamma = 1.4$ usando una legge di viscosità $\mu/\mu_0 = (T/T_0)^\omega$ e diversi valori di ω . Destra: confronto di soluzioni ottenute da diversi autori per diversi valori di Pr e ω (Rubesin e Johnson, 1949).

distribuzioni di velocità e temperatura (per il caso $T_w = T_\infty$) sono illustrate in figura 1.36. Dal confronto col caso precedente risulta uno spessore dello strato limite più piccolo con un incremento di temperatura che è circa il 20% di quello del caso adiabatico.

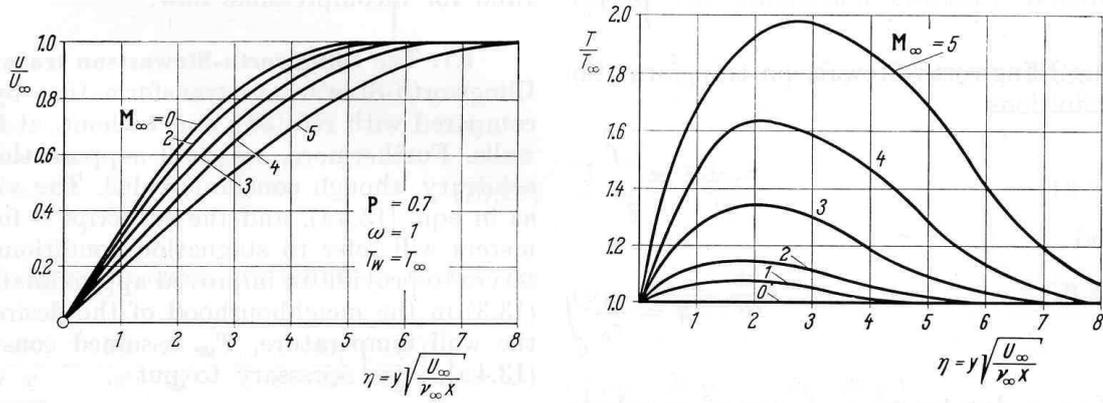


Figura 1.36: Distribuzione di velocità (sinistra) e temperatura (destra) in un flusso comprimibile laminare su lamina piana con scambio termico. Risultati ottenuti con $T_w = T_\infty$, $Pr = 0.7$, $\omega = 1$, $\gamma = 1.4$ (Hantzsche e Wendt, 1940).

1.5.2 Equazioni integrali

Nei casi più generali, la soluzione delle equazioni dello strato limite viene affrontata in maniera approssimata utilizzando le equazioni integrali di quantità di moto ed energia. Anche in questo caso, come in quello del flusso incomprimibile, l'approccio alla soluzione non è unico ed è ulteriormente complicato dalla presenza di un'ulteriore variabile dipendente e dalla necessità di distinguere tra i casi di flusso adiabatico e non adiabatico. Usando le definizioni di entalpia locale e totale:

$$h = c_p T, \quad (1.250)$$

$$h_0 = h + \frac{1}{2}u^2 = c_p T + \frac{1}{2}u^2, \quad (1.251)$$

l'equazione dell'energia (1.211) si può riscrivere

$$\rho \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) = u \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right), \quad (1.252)$$

con le condizioni al contorno

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 : \quad u = v = 0; \quad T = T_w \\ y = \infty : \quad u = U(x); \quad h = h_1(x) \end{array} \right\} \text{ con scambio termico;} \quad (1.253)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 : \quad u = v = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ y = \infty : \quad u = U(x); \quad h = h_1(x) \end{array} \right\} \quad \text{flusso adiabatico.} \quad (1.254)$$

Inoltre, la pressione $p(x)$ è nota dall'equazione di Bernoulli, equazione (1.233). Poiché la pressione risulta costante nello strato limite si ha:

$$\frac{h}{h_1} = \frac{T}{T_1} = \frac{\rho_1}{\rho}, \quad (1.255)$$

dove h_1 , T_1 , ρ_1 indicano i valori di entalpia, temperatura e densità al bordo dello strato limite. Le definizioni di spessore di spostamento e di quantità di moto, come già anticipato, dovranno essere modificate a causa della variabilità della densità nello strato limite, e si dovranno definire nuovi parametri integrali, come di seguito riportato:

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_1 U}\right) dy \quad \text{spessore di spostamento;} \quad (1.256)$$

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_1 U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad \text{spessore di quantità di moto;} \quad (1.257)$$

$$\delta_3 = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_1 U} \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right) dy \quad \text{spessore di dissipazione;} \quad (1.258)$$

$$\delta_H = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_1 U} \left(\frac{h}{h_1} - 1\right) dy \quad \text{spessore di entalpia;} \quad (1.259)$$

$$\delta_u = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad \text{spessore di velocità.} \quad (1.260)$$

Da queste definizioni è immediato verificare che

$$\delta_1 - \delta_u = \delta_H. \quad (1.261)$$

Integrando l'equazione della quantità di moto (1.210) e dell'energia (1.252) sullo strato limite, come fatto nel caso di flusso incomprimibile, si ottengono le equazioni integrali. Sapendo che

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} = -\frac{M^2}{U} \frac{dU}{dx},$$

l'equazione integrale della quantità di moto si scrive:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} - M^2\right) = \frac{\mu_w}{\rho_1 U^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w. \quad (1.262)$$

L'equazione integrale dell'energia meccanica si ottiene moltiplicando l'equazione (1.210) per u e integrando rispetto ad y . Dopo alcuni passaggi si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\varrho_1 U^3 \delta_3) + \varrho_1 U^2 \frac{dU}{dx} (\delta_1 - \delta_u) = \int_0^\delta \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (1.263)$$

Infine, l'equazione dell'energia diventa:

$$\frac{d}{dx} (\varrho_1 h_1 U \delta_H) + \varrho_1 U^2 \frac{dU}{dx} \delta_H = - \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right)_w + \int_0^\delta \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (1.264)$$

Combinando le equazioni (1.263) e (1.264) si ottiene la seguente equazione,

$$\frac{d}{dx} \left[\varrho_1 U \left(h_1 \delta_H - \frac{1}{2} U^2 \delta_3 \right) \right] = - \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right)_w, \quad (1.265)$$

che può essere riscritta in termini di entalpia totale:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \varrho u (h_0 - h_{0,1}) = - \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right)_w. \quad (1.266)$$

Integrando questa equazione lungo x si ha:

$$\frac{1}{2} U^2 \delta_3 = h_1 \delta_H + \frac{1}{\varrho_1 U} \int_0^x \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right)_w dx. \quad (1.267)$$

Il secondo termine a secondo membro di questa equazione è nullo nel caso di parete adiabatica. Introducendo la velocità del suono al bordo dello strato limite, $a_1 = \gamma R T_1$, e ricordando che $h_1 = c_p T_1 = a_1^2 / (\gamma - 1)$, dall'equazione (1.267) si ha:

$$\delta_H = \frac{1}{2} (\gamma - 1) M^2 \delta_3, \quad (1.268)$$

con $M = U/a_1$. Pertanto, dalle equazioni (1.261) e (1.268) si ottiene la seguente equazione integrale dell'energia:

$$\frac{d\delta_3}{dx} + \frac{\delta_3}{U} \frac{dU}{dx} [3 - (2 - \gamma) M^2] = \frac{2}{\varrho_1 U^3} \int_0^\delta \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (1.269)$$

La risoluzione delle equazioni integrali (1.262) e (1.269) può essere condotta usando la metodologia illustrata nel caso di flusso incomprmissibile. In questa sede si illustrerà il risultato ottenuto nel caso di flusso ad un profilo aerodinamico (NACA 8410), come illustrato

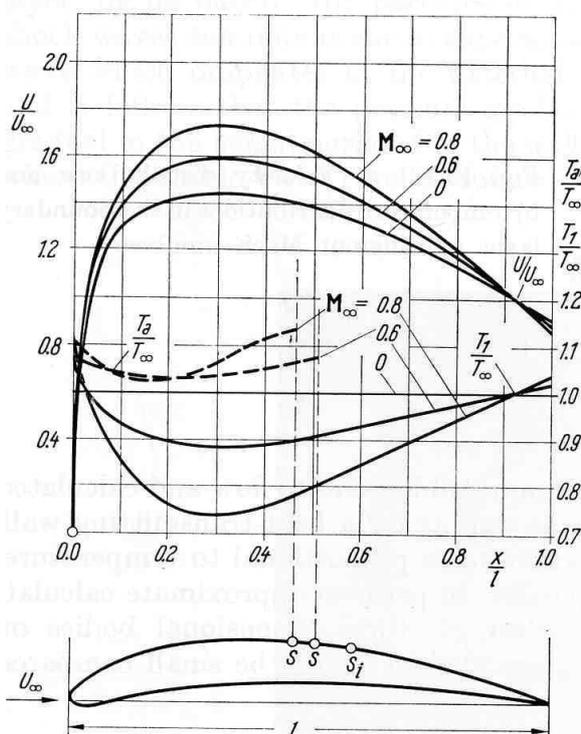


Figura 1.37: Distribuzione di velocità e temperatura al bordo dello strato limite e di temperatura adiabatica di parete per il flusso potenziale intorno ad un profilo aerodinamico

da Schlichting (1968). La distribuzione di pressione nel caso di flusso ideale ottenuta per angolo di attacco nullo e a tre diversi numeri di Mach della corrente indisturbata è mostrata in figura 1.37. Il grafico mostra anche la distribuzione di temperatura T_1 al bordo dello strato limite. La figura 1.38 fornisce la distribuzione di δ_1 , δ_2 e τ_w lungo il lato in depressione. All'aumentare del numero di Mach il punto in cui si ha separazione (laminare) si muove verso il bordo d'attacco. La distribuzione di δ_2 e τ_w varia poco col numero di Mach, mentre la variazione è sensibile per δ_1 . La figura 1.39 mostra la distribuzione della velocità e della temperatura in direzione perpendicolare alla parete a diverse posizioni lungo il profilo. Mentre i profili di velocità non cambiano molto col numero di Mach, la temperatura a parete aumenta sensibilmente (si ricorda che la parete è adiabatica).

1.5.3 Flusso turbolento

In analogia con quanto fatto nel caso dei flussi incomprimibili, si introduce la decomposizione in parte media e fluttuazione anche per la densità e la temperatura nei flussi comprimibili. Quindi, operando il procedimento di media delle equazioni di conservazione,

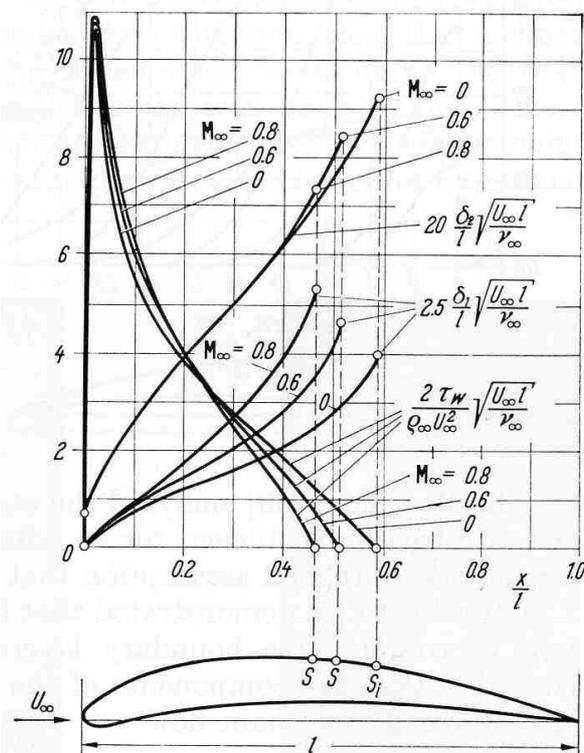


Figura 1.38: Spessore di quantità di moto, spessore di spostamento e sforzo d'attrito a parete per il flusso di figura 1.37.

si ottengono le seguenti equazioni dello strato limite turbolento:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}v)}{\partial y} = 0, \quad (1.270)$$

$$\bar{\rho}u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho}v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_\tau) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right], \quad (1.271)$$

$$\bar{\rho}u c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{\rho}v c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \bar{u} \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(k + k_\tau) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] + (\mu + \mu_\tau) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2, \quad (1.272)$$

dove per il flusso termico, in analogia con gli sforzi turbolenti, si è adottata la seguente approssimazione:

$$q_l = -k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad \text{flusso laminare}; \quad q_\tau = -k_\tau \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad \text{flusso turbolento.}$$

Il coefficiente k_τ si determina in base al numero di Prandtl turbolento:

$$Pr_t = \frac{\mu_\tau c_p}{k_\tau}, \quad (1.273)$$

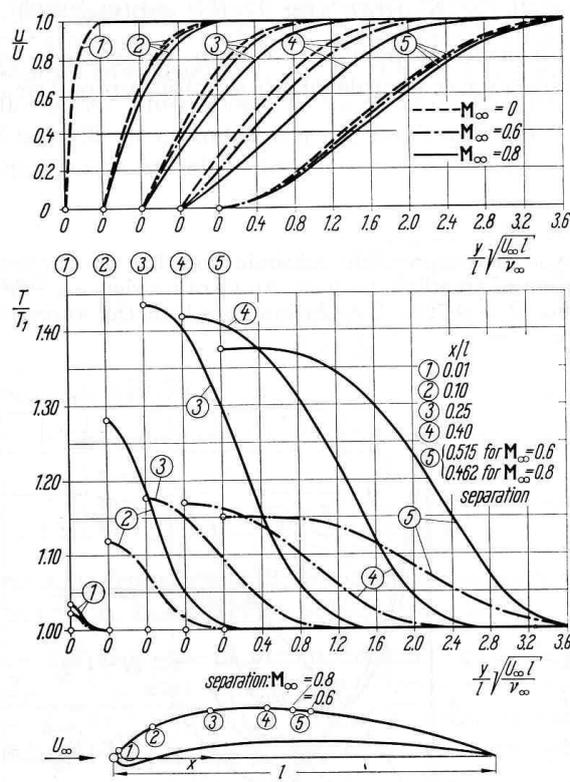


Figura 1.39: Distribuzioni di velocità e temperatura a diverse posizioni nello strato limite per il flusso di figura 1.37.

dove Pr_t assume un valore prossimo all'unità ($Pr_t \simeq 0.7$).

Si è osservato che i profili di velocità e temperatura coincidono per il flusso laminare su lamina piana ad incidenza nulla se si trascura il calore di dissipazione e il numero di Prandtl è pari ad uno. La stessa situazione si verifica per flusso turbolento alla condizione che anche Pr_t sia unitario. Questo implica che il meccanismo fisico alla base dello scambio di quantità di moto e calore è il medesimo. Quindi si ha:

$$q(x) = \frac{k}{\mu} \frac{T_w - T_\infty}{U_\infty} \tau_0(x), \tag{1.274}$$

che può essere scritta nel modo seguente:

$$N_x = \frac{1}{2} Re_x c_f \quad Pr = Pr_t = 1, \tag{1.275}$$

nota come analogia di Reynolds valida sia per flusso laminare che per flusso turbolento. Tale equazione rimane valida anche nel caso di presenza di comprimibilità, come nel caso laminare, a condizione che il numero di Nusselt sia definito con riferimento alla differenza di temperatura ($T_w - T_a$).

La difficoltà del calcolo dello strato limite turbolento nasce dal fatto che i coefficienti di viscosità e scambio termico turbolenti, μ_τ e k_τ , non sono proprietà del fluido ma del flusso e dipendono quindi dalla distanza dalla parete. A distanza sufficiente da parete i loro valori sono molto più grandi di quelli laminari che infatti possono essere trascurati. Al contrario, vicino a parete, cioè nel sottostrato laminare, le fluttuazioni turbolente tendono ad annullarsi e così i coefficienti di diffusione turbolenti. Nel caso $Pr = 1$ vale l'equazione (1.275) grazie alla coincidenza delle distribuzioni di velocità e temperatura anche nel sottostrato laminare. Osservando che in generale il valore di Pr può essere molto diverso da uno nel sottostrato laminare (μ dipende dalla temperatura), l'equazione (1.275) perde la sua generalità. In questo caso, assumendo che $Pr_t = 1$, lo strato limite è diviso in due zone. Nel sottostrato laminare, in cui i coefficienti di viscosità turbolenta si annullano, si ha:

$$\frac{q}{\tau} = -\frac{k}{\mu} \frac{dT}{du},$$

mentre nella zona turbolenta

$$\frac{q}{\tau} = -c_p \frac{dT}{du}.$$

Assumendo $u(0) = 0$ e $T(0) = T_w$ e ipotizzando che q/τ rimanga costante, nel sottostrato laminare si ha:

$$\frac{q}{\tau} = -\frac{k}{\mu} \frac{T_l - T_w}{u_l} = -\frac{k}{\mu U_\infty} \frac{T_l - T_w}{u_l/U_\infty}, \quad (1.276)$$

dove u_l e T_l indicano i valori al bordo del sottostrato laminare, mentre u_∞ e T_∞ indicano i valori del flusso indisturbato. Analogamente, nella zona turbolenta:

$$\frac{q}{\tau} = -c_p \frac{T_l - T_\infty}{u_l - U_\infty}. \quad (1.277)$$

Uguagliando le espressioni per continuità al bordo del sottostrato laminare si ha:

$$Pr (T_w - T_\infty) = -\frac{U_\infty}{u_l} \left[1 + \frac{u_l}{U_\infty} (Pr - 1) \right] (T_l - T_w). \quad (1.278)$$

Quindi il coefficiente locale di scambio termico si può scrivere come segue:

$$\alpha = \frac{q}{T_w - T_\infty} = \frac{1}{1 + (u_l/U_\infty)(Pr - 1)} \frac{c_p \tau}{U_\infty}. \quad (1.279)$$

Esprimendo questo risultato in termini di N , si può generalizzare l'analogia di Reynolds (secondo quanto fatto da Prandtl e Taylor) nel modo seguente:

$$N_x = \frac{1/2 c_f Re_x Pr}{1 + (u_l/U_\infty)(Pr - 1)}, \quad (Pr_t = 1), \quad (1.280)$$

In realtà la suddivisione dello strato limite in due sole zone, come precedentemente ipotizzato, non è completamente aderente alla realtà, in quanto è nota la presenza di una

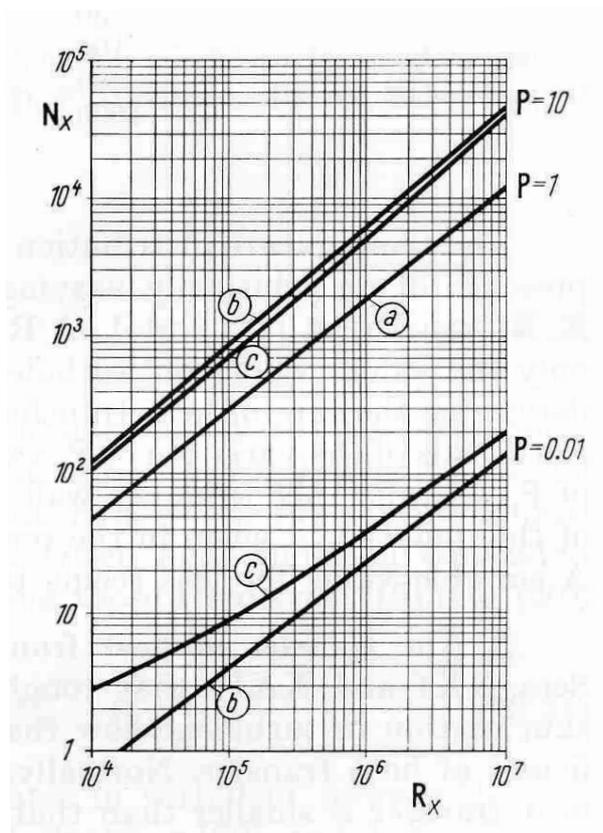


Figura 1.40: Variazione del numero di Nusselt in funzione del numero di Reynolds; $Pr_t = 1$ e c_f valutato con l'equazione (1.183): (a) equazione (1.275), (b) equazione (1.280), (c) equazione (1.281) (Schlichting, 1968).

zona di transizione tra le due. L'equazione (1.280) è stato modificato in tal senso da von Kármán:

$$N_x = \frac{1/2 c_f Re_x Pr}{1 + 5 \sqrt{1/2 c_f} \{(Pr - 1) + \ln[1 + 5/6(Pr - 1)]\}}, \quad (Pr_t = 1). \quad (1.281)$$

La figura 1.40 fornisce l'andamento di N_x con Re_x a diversi numeri di Prandtl; si noti, infine, che le equazioni (1.280) e (1.281) riproducono l'equazione (1.275) per $Pr = 1$.

Nel caso $Pr_t \neq 1$ è valida la seguente espressione del numero di Nusselt:

$$N_x = \frac{1/2 c_f Re_x Pr}{Pr_t + \sqrt{1/2 c_f} \{(Pr - Pr_t) a + A\}}, \quad (1.282)$$

dove a dipende dal rapporto Pr/Pr_t e $A \simeq 4(1 - Pr_t)$.

Consideriamo la distribuzione di temperatura nello strato limite in presenza di effetti di comprimibilità. Nel caso $Pr = Pr_t = 1$ e pressione costante la distribuzione di temperatura soddisfa le equazioni (1.239) e (1.242) ottenute per flusso laminare. Nel caso

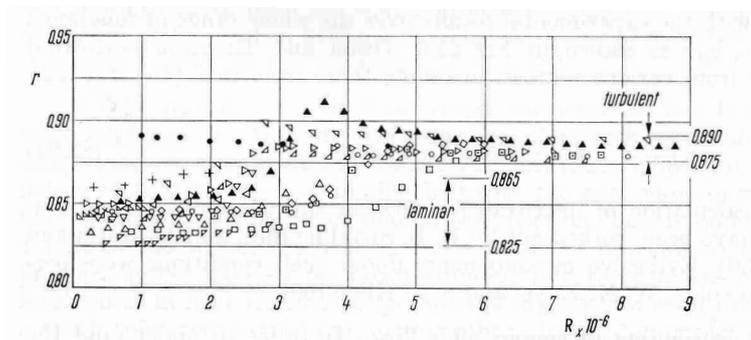


Figura 1.41: Fattore di recupero in funzione del numero di Reynolds per M_∞ compreso tra 1.2 e 6 (Mack, 1954).

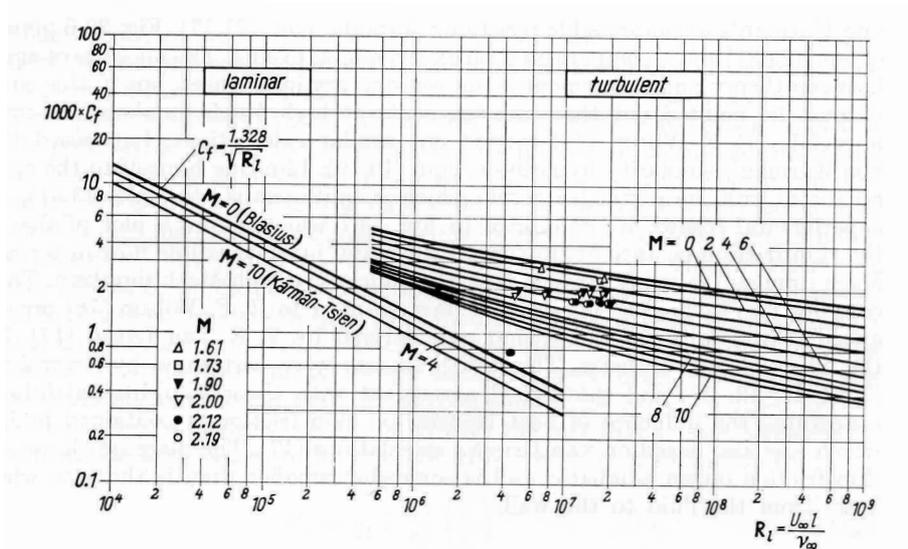


Figura 1.42: Coefficiente di resistenza su una lamina piana adiabatica ad incidenza nulla ($\gamma = 1.4, \omega = 0.76, Pr = 1$). Confronto tra risultati teorici di van Driest (1951) e dati sperimentali (van Driest, 1951).

più generale $Pr \neq Pr_t \neq 1$ è possibile valutare il recupero di temperatura su una parete (adiabatica) usando l'equazione (1.247),

$$T_a = T_\infty \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right), \tag{1.283}$$

dove il fattore di recupero, r , è maggiore nel caso turbolento rispetto a quello laminare, come mostrato in figura 1.41.

L'analisi del flusso è completata dalla descrizione dell'effetto di comprimibilità sul coefficiente d'attrito mostrato nelle figura 1.42, 1.43, 1.44.

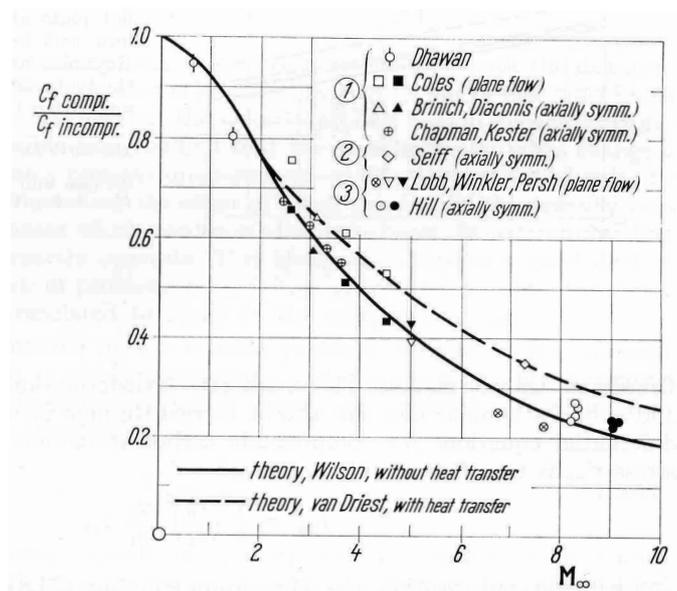


Figura 1.43: Rapporto tra coefficiente d'attrito su una lamina piana ad incidenza nulla nel caso di flusso comprimibile ed incomprimibile al variare del numero di Mach ($Re_x \approx 10^7$). ($\gamma = 1.4, \omega = 0.76, Pr = 1$). ——— Wilson (1950); - - - - van Driest (1951); (1) parete adiabatica, gradiente di pressione nullo; (2) scambio termico, gradiente di pressione nullo; (3) scambio termico, $T_w/T_\infty = 8$, gradiente di pressione favorevole (Hill, 1956).

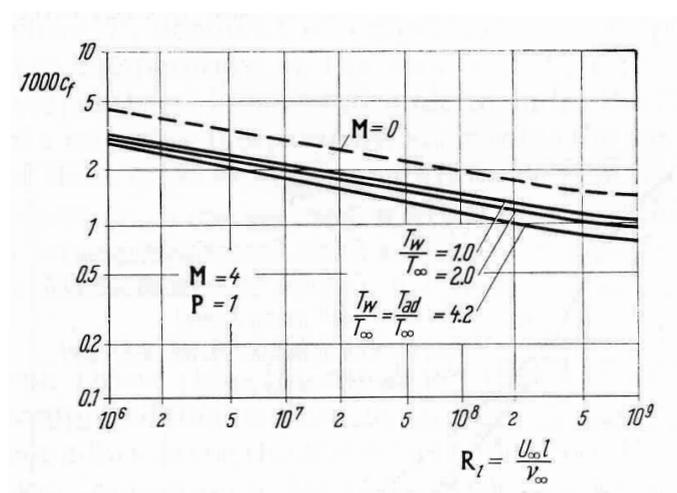


Figura 1.44: Coefficiente di resistenza per una lamina piana ad incidenza nulla in un flusso turbolento con scambio termico in funzione di Re_l al variare di T_w/T_∞ (van Driest, 1951).